УДК 336

ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК: АНАЛИЗ СОСТОЯНИЙ (МОДЕЛИ МАРКОВА)

Игорь Константинович КЛЮЧНИКОВ[1], д.э.н, профессор,
Ирина Александровна НИКОНОВА[2], д.э.н, профессор,
Анна Игоревна КЛЮЧНИКОВА[3]
[1,2,3]Автономная некоммерческая организация высшего образования «Международный банковский институт» имени Анатолия Собчака
Санкт-Петербург, Россия
Адрес для корреспонденции: 191023, Невский пр., 60
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Определение вероятности перехода различных состояний финансового рынка имеет важное значение для оценки его колебаний. На рынке наблюдаются многочисленные переходы, рассредоточенные во времени. Поскольку экспоненциальное распределение не обладает памятью, будущий рыночный результат зависит только от текущего состояния рынка и не зависит от того, когда произошел последний переход и / или какое было предыдущее состояние. В статье продемонстрированы оценочные и прогнозные возможности марковского метода анализа финансового рынка. Они сосредоточены вокруг четырех фундаментальных свойств рассматриваемого метода: возможность оценки текущего состояния рынка в каждый момент времени; возможность анализа событий «без памяти», с исходом, зависящим только от текущего состояния системы; возможность анализа ненаблюдаемых состояний и привлечение к анализу скрытых параметров рынка; возможность количественного учета ранее не поддающейся количественной оценке данных, что позволило параметризировать и применять расчетные процедуры как для качественной, так и некачественной и неструктурированной информации.

Ключевые слова

Финансовые рынки, финансовые циклы, финансовая эконометрика, модели Маркова.

UDC 336

FINANCIAL MARKET: STATE ANALYSIS (MARKOV MODELS)

Igor Konstantinovich KLIOUTCHNIKOV[1], doctor of Economics, Professor,
Irina Aleksandrovna NIKONOVA[2], doctor of Economics, Professor,
Anna Igorevna KLIOUTCHNIKOVA[3]

[1,2,3]Autonomous non-profit organization of higher education «International banking Institute named after Anatoliy Sobchak», Saint Petersburg, Russia
Address for correspondence: 60 Nevsky Ave., 191023, Saint Petersburg, Russia

Abstract

Determining the transition probability of various states of the financial market is essential for assessing its fluctuations. There are numerous transitions in the market, dispersed in time. Since the exponential distribution has no memory, the future market outcome depends only on the current state of the market. It does not depend on when the last transition occurred and/or what the previous state was. The article demonstrates the estimated and predictive capabilities of the Markov method for analyzing the financial market. They are centered around four fundamental properties of the method under consideration: the ability to assess the current state of the market at any given time; the ability to analyze events «without memory», with an outcome depending only on the current state of the system; the possibility of exploring unobservable states and involving hidden market parameters in the analysis; the case of quantitative accounting of previously unquantifiable data, which made it possible to parameterize and apply calculation procedures for both qualitative and non-qualitative and unstructured information.

Keywords

Financial markets, financial cycles, financial econometrics, Markov models.

1. Введение

Финансовый рынок можно представить в виде нелинейной системы. Нелинейность может свидетельствовать о неустойчивости и парадоксальности рынка. В таких условиях интуиция и накопленный опыт далеко не всегда позволяют найти вектор движения и установить поведение рыночных агентов. Поскольку нелинейные системы обладают множеством сценариев развития с разными уровнями правдоподобия и вариантами будущего, то вероятность перехода к следующим состояниям рассчитывается непростой комбинацией текущих параметров. Чем дальше от равновесия находится нелинейная система, тем ниже уровень ее устойчивости, больше в ней парадоксальности и выше вероятность неожиданных исходов. Даже малые отклонения в любой части современного финансового рынка могут молниеносно спровоцировать возникновение непредвиденных качеств и свойств, которые способны перевести рынок в новое состояние, отличное от текущих наблюдений. В наиболее острой форме такие переходы наблюдались в ходе схлопывания крупных финансовых пузырей (например, 2008 г.) и шоковых внешних воздействий (2014 г. – изменение нефтяных цен).

Поскольку характерной особенностью современной динамики финансового рынка является нарастающая его неустойчивость (Ключников, Молчанова, Ключников, 2017) и неопределенность (Ключников, 2013), то учет состояний рынка и знание вероятностей его переходов в новые состояния необходим для брокеров, регуляторов и политиков как в повседневной деятельности, так и при стратегическом планировании. Важной методологической основой современного анализа состояний рынка в ходе его колебаний является марковский процесс. Обладая целым рядом преимуществ, он успешно завоевывает ведущие позиции при прогнозировании финансовой деятельности.

2. Масштабы проблемы и информационная база

Относительная простота логистической карты рыночных колебаний – динамическое волновое движение (вверх-вниз) – располагает к использованию ее в качестве точки отсчета при построении концепции финансового цикла. Входные условия перехода к конструированию могут быть разными. В настоящей статье рассматривается стохастический вариант анализа состояний рынка с позиции моделей Маркова. Он позволяет учитывать многие особенности и свойства, которые при других подходах обычно остаются в стороне. Поэтому в ряде случаев такой вариант анализа позволяет получать оригинальный результат с проекцией движения в новом направлении, отличном от привычного.

При значительном упрощении описание финансового цикла сводится к тому, что рынок обладает большой чувствительностью к начальным условиям. Общим источником такой чувствительности к начальным условиям является то, что финансовый рынок представляет собой постоянное схлопывание и раздувание пространства (прежде всего информационного), на котором он строится. Одной из ключевых тенденцией является генерирование новых свойств и значительное распространение ранее вторичных, а также затухание и отмирание многие старых и привычных. Такие сжатия и расширения чередуются с определенной последовательностью и удивительной регулярностью, что наделяет их свойствами циклов. Причем совершенно различных циклов; они могут различаться по продолжительности (колебания в долях секунды в высокочастотной торговле, дневные колебания – например, циклы Элиотта, недельные, месячные и многолетние), территории и отрасли охвата (разные финансовые центры, рынки, страны, регионы), институтам (биржевой, банковский, корпоративный), методам регулирования (смена режимов денежно-кредитной и фискальной политики).

Обстоятельный макроэкономический анализ биржевых колебаний проведен в книге «Макроэкономика. Кредитные и биржевые циклы» (Ключников, 2022). Специалисты Международного валютного фонда проанализировали финансовые циклы основных стран за период 1960–2007 гг. В ходе анализа изменений уровней переменных было идентифицировано 470 финансовых циклов (Claessens et al., 2011). Альтернативная методология анализа циклов использована в книге «Финансовые кризисы: теория, история и современность» (Ключников и др., 2011). Анализ колебаний переменной вокруг своей тенденции позволил определить «финансовый цикл» как отклонение от этой тенденции. С четко определенной хронологией выделены различные по глубине и продолжительности циклы. Финансовые циклы с древних времен были проанализированы Димитрисом Хорафасом (Chorafas, 2015). Международные финансовые организации нередко пользуются специальным алгоритмом циклической датировки, предложенным в 2002 г. Дон Хардингом и Адриан Пэганом (Harding, Pagan, 2002).

Для текущего анализа циклических колебаний и хронологической их идентификации чаще всего применяется достаточно простые методологии – однонаправленное изменение финансовых показателей за определенный промежуток времени (обычно два-три квартала) либо изменение пары смежных локально абсолютных максимумов и минимумов, которые соответствуют определенным правилам (чаще при анализе коротких циклов). В одном из последних документов Банка международных расчетов колебания, характеризующие смену фазы цикла, определяются как результат накопления рисков в преддверии всплесков (Juselius, Tarashev, 2022). Во многом похожий метод применяется в отечественной практике анализа банкротств и дефолтов банков и других организаций. За счет варьирования показателей (добавления новых данных) меняется тенденция и хронологическое датирование циклов. Данные подходы основаны на простых линейных конструкциях.

Имеется глубокое и интересное исследование колебаний финансовых рынков с математических позиций, которое стало во многом концептуальной основой технического анализа биржевого движения цен (Elliott, 2004). Существует достаточно много работ, которые рассматривают различные частные рыночные случаи с марковских позиций.

Финансовый рынок в целом с марковских позиций рассматривается, например, в коллективных исследованиях, подготовленных Робертом Эллиоттом и Роджмаром Мамоном в 2007 г. (Elliott, Mammon, 2007) и в 2014 г. – второй том с приложениями (Elliott, Mammon, 2014), а также под редакцией Йорна Сасса и Манфреда Шёла (Sass, *Schal*, 2017). В отечественной финансовой практике и учебном процессе широко используются марковские модели для анализа финансовых рисков (Солодов, 2018). Появились работы, в которых рассматривается применение марковских процессов в финансовых интеллектуальных системах (Dixon, Halperin, Bilokon, 2020).

Марковские процессы широко применяются в смежных сферах знаний. Целый кластер работ имеется в различных проектах глубокого обучения (Shanmugamani, 2018; Due, 2017) и распознания речи и языка и искусственного интеллекта (Hassain, 2017), а также общего анализа и синтеза различных типов скрытых марковских моделей (Coelho, Pinho, Boaventura-Cunha, 2021). По нашему мнению, данные исследования интересны для оценок состояний финансовых рынков, поскольку в них предлагаются способы распознавания пограничных изменений в текущих значениях и процессах.

Имеется глубокое и интересное исследование колебаний финансовых рынков с математических позиций, которое стало во многом концептуальной основой технического анализа биржевого движения цен (Elliott, 2004). Существует достаточно много работ, которые рассматривают различные частные рыночные случаи с марковских позиций. Например, движение биржевых (например, Соколов, Бородин, 2010), высокоскоростной торговли на рынке (Davison, 2016), режимов ликвидности и рисков на валютных рынках (Davison, Vol. 10, 2016). Тем не менее финансовый рынок нуждается в дальнейшем изучении с позиции марковского моделирования. Во-первых, в условиях роста рыночной неопределенности возрастает значение стохастического анализа различных рыночных состояний, особенно скрытых и не поддающихся непосредственному наблюдению, методология исследования которых еще недостаточно разработана. В-вторых, возрастает необходимость проверки полученных результатов и оценки уровней достоверности полученных вариантов. В-третьих, в связи с новыми перспективами, открывающимися перед марковскими подходами, появляется необходимость расширения направлений их приложения к финансам, в том числе в связи с широким внедрением в отрасль интеллектуальных систем с машинным обучением.

Авторы пытаются предложить ряд подходов к решению данных задач. В статье рассмотрены некоторые аналитические и методологические аспекты анализа финансовых колебаний и состояний рынка с использованием алгоритмов, применяемых к динамическим стохастическим системам. На такой основе раскрываются три основные темы – использование марковских цепей в финансах, особенности применения скрытых марковских моделей и возможности проверки и оптимизации полученных результатов с использованием марковских процессов на финансовом рынке. В статье не ставилась задача строгого расчетного обоснования применения данных методов для оценки колебаний и состояний финансовых рынков. Это позволило резко сократить объем статьи и сосредоточить внимание преимущественно на сущностных и концептуально значимых задачах.

3. Основные подходы и виды моделей Маркова

В проблеме состояний и колебаний рынка особое место занимает вопрос рыночной устойчивости. Для определения устойчивого состояния рынка в связи с долговременным распределением поведения целесообразно использовать цепи Маркова (Gagniuc, 2017, p. 46–59). Дело в том, что теория вероятностей пришла к понятию дискретного времени, а модели Маркова позволяют по-новому подойти к анализу прерывистого и фракционного во времени и пространстве финансового процесса. В основе находятся эксперименты с участием независимых переменных, которые учитывают только текущее состояние рынка, а не различные предшествующие его состояния – свойства Маркова (Ponn-Nielsen, Hansen, 2014). По нашему мнению, для симуляции финансового рынка лучше всего подходит использование случайного поля Маркова (одна из четырех моделей Маркова), которое является обобщением цепи Маркова в нескольких измерениях. Дело в том, что марковость желательна в прогнозном моделировании финансового рынка, поскольку позволяет переходить в рассуждениях на более высокий уровень и решать проблемы, которые в противном случае не было бы возможности решать из-за их сложности. Учитывая большие данные и ограничения на ресурсы, особенно время, найти приемлемые решения для многих проблем становится все сложнее. С другой стороны, проблемы, которые можно решать, определяются как послушные или «обрабатываемые». Как раз цепи Маркова позволяют находить приемлемые решения при рассмотрении таких проблем посредством расчетов различных сценариев развития финансового рынка.

Современный подход к анализу финансовых состояний в процессе колебаний, как и классическое изучение финансовых циклов, сводится преимущественно к определению времени, траектории, глубины и причин финансовых изменений. С точки зрения физики эти процессы можно свести к кинематике (траектории) и динамике (причинам и поведении, меняющемся во времени). При этом каждое состояние рынка определяется в рамках определенной колебательной частоты. Состояний рынка бесчисленное множество, и их описание вкладывается в пространственно-временной континуум с определенным набором координат. Каждое следующее по времени состояние финансового рынка уникально. С марковских позиций оно зависит только от текущих координат, что определено детерминистской динамикой финансовой системы.

Марковские модели смены (переключения) режимов позволяют определять изменение режимов функционирования финансового рынка. Они относятся к классу эндогенных моделей переключения режима. На практике финансовые инновации могут выступать в качестве таких «переключателей» режимов функционирования рынка (Сигова, Ключников, 2016). В таких случаях переход между состояниями системы управляется параметрами, оцениваемыми вмешательством новации, то есть внутрисистемными процессами. Такой подход не противоречит предложенной Хаймоном Мински модели финансовых турбулентных изменений, в которой количественный переход к кризису (финансовому пузырю или его разрыву) не задан априори, в отличие от количества состояний финансового рынка. Состояния рынка и вероятности их изменений оцениваются марковской цепью, что позволяет определить вероятность наступления существенного изменения режима.

Марковская модель в контексте финансового рынка представляет собой не что иное, как ряд вероятностей, которые свидетельствуют, насколько вероятна конкретно выбранная последовательность событий, которая произошла из определенной предшествующей последовательности, или наоборот, что наиболее вероятное в предшествующей последовательности может иметь вес (и какой) для будущего. Достоинством рассматриваемого моделирования является то, что среди многих других вещей оно способно создать свою собственную «родовую» последовательность и свой собственный набор правил. Так, для анализа роли финансовых инноваций в изменении режима функционирования финансового рынка важны знания типа «что, если», которые предоставляет байесовская модель сравнений. Марковская модель позволяет идентифицировать пороговое изменение, которое при байесовском рассмотрении раскрывает вариантность последствий.

Модели Маркова можно рассматривать как своеобразную дорожную карту, которая постоянно предоставляет новые ответы при смене рыночного маршрута. Каждое вычисление дает новый, отличный от предыдущего результат. В этом содержится, с одной стороны, преимущество данного моделирования – множественность ответов и сценариев, а с другой стороны, определяет сложность анализа и требует специальных процедур верификации, адаптации, обработки сценариев на соответствие прогнозным требованиям, ранжирования уровней вероятности состояний и проверки их достоверности.

Модели Маркова включают цепи Маркова[6]. Примерами могут выступать толерантная марковская цепь, цепь переменного порядка с деревом контекстов, цепь Маркова-Монте-Карло и скрытая модель Маркова (Ching, Ng, 2006). Система управления процессом моделирования представляет собой математическую основу для симулирования принятия решений при двух разных обстоятельствах. Первое: все параметры системы наблюдаются и на некоторые из них имеется возможность воздействовать (все параметры открыты, часть параметров являются случайными, а часть управляемыми) (Handbook…, 2002). Второе: основное состояние скрыто и случайно, оценка параметров системы происходит посредством косвенных параметров

[6] Популярная в 1990-х гг. игра «Монополия» по своей сути является своеобразным прикладным игровым результатом марковской цепи.

(Zucchini, MacDonald, Langrock, 2016). Классические процессы принятия решений Маркова для реальных условий, включая финансовый сектор, представлены в книге «Марковские процессы принятия решений в практике», 2017. (Markov…, 2017).

Первые попытки применения марковских процессов при расчетах цен финансовых активов относятся к 1970-м гг. (Mathematics …, 1997). В дальнейшем марковские процессы стали широко использовать при изучении колебаний финансовых активов – акций, опционов и других деривативов (Hull, 2017; Glasserman, 2003), а также оценке действия теории полезности в финансовой сфере (Nawrocki, Viole, 2014) и рациональности ожидания (Kodres, Pritsker, 2002) наступления одних событий по сравнению с другими со счетным множеством состояний – в рамках теории мартингала (Ширяев, 2016). В эконометрической форме рациональность ожидания выражается как асимптотическое поведение – $f(n) \sim n^2$, означающее, что функция n асимптотична квадрату n.

4. Цепочки Маркова

Последовательность данных и временные ряды являются основой статистической информации, поступающей с финансовых рынков. Кроме того, финансовый рынок хорошо впитывает новостной поток. В последние годы новые технологические и вычислительные возможности создали условия для резкого расширения данных, используемых финансистами.

Одним из наиболее важных шагов финансовой аналитической работы является анализ последовательных данных (и / или временных рядов) в рамках различных математических моделей. Такой анализ позволяет следить за текущим состоянием рынка и призван помочь при оценках его будущего. Он позволяет выдвигать различные гипотетические предположения и проводить тестирование в процессе выработки решений. Последовательность финансовых данных $\{X^{(n)}\}$ может быть логически представлена в виде вектора $(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}$, где T – продолжительность последовательности, а $X^{(i)} \in DOM(A)$ $(\leq i \leq T)$, что связанно с определенной логикой и типом данных. В контексте финансовых рынков можно рассмотреть и предложить различные типы сопоставлений числовых данных в двух частях формы. Домены атрибутов, связанных с этими двумя типами, обычно относят к двум категориям данных – числовым (например, число сделок, цена сделок – левая часть) и категориальным (обычно с лимитами значениями конечных и неупорядоченных или неструктурированных, то есть $a, b \in DOM(A)$ – правая часть), соответственно. Так, к категориальным можно отнести состояние рынка, которое отражается целым набором числовых явлений и показывает их вектор – например, рост или падение рынка. Если числовые данные легко и повсеместно детально изучаются, то категориальные данные более проблематичны для анализа и количественной оценки. Для их обработки все чаще привлекают цепи Маркова.

Алгоритмы последовательностей категориальных данных позволяют определять рыночные тенденции и выяснять вероятность их наступления. Однако огромное число возможных сценариев, которые следуют в ходе соответствующих вычислительных процедур, сдерживаются возможностью их прямого применения. Так, предположим, что каждый данный параметр финансового рынка $X^{(n)}$ в категориальной последовательности данных принимает значения в следующем наборе: $M \equiv \{1,2,\dots,m\}$, при этом m – конечный параметр их набора, то есть последовательность множества обладает m возможными категориальными состояниями. Обычная модель для k-порядка цепи Маркова является следующей: $(m-1)m^k$ – модель параметров, в которой число переходных вероятностей увеличивается экспоненциально в соответствии с порядком модели.

В виде марковской цепочки можно представить превращения на фондовом рынке. Другим ее примером является финансовая рекомендательная система диалогового формата, в которой поиск идет путем перехода из одного состояния в другое в соответствии с определенными вероятностными правилами и не зависит от предшествующих состояний системы (Klioutchnikov, Klioutchnikov, 2021). В таких случаях любые будущие состояния системы не являются фиксированными. Таким образом, вероятность перехода к будущему состоянию зависит от двух обстоятельств: только от текущего состояния и от прошедшего времени между прошлым состоянием и новым.

Так, цепочка Маркова позволяет описать стохастическими методами последовательность колебаний цен, в которых вероятность каждого колебания зависит только от состояния и цен, которые были достигнуты в предыдущем событии. Данная последовательность представляет собой либо дискретное пространство состояний цен, либо дискретное множество индексов (конкретное состояние цен в каждый момент времени). В первом случае цепочка переходов представляется как марковский процесс в дискретном или непрерывном времени со счетным пространством состояний, то есть независим от характера времени. Во втором – цепь имеет дискретное время в любом счетном или непрерывном пространственном состоянии, то есть независимо от пространства состояний. Таким образом, расставлены акценты: в первом варианте на пространстве, а во втором – на времени.

Финансовый рынок можно представить в виде цепочки с последовательными ценовыми событиями, которые происходят в однородной временной среде. Данную цепочку событий можно представить в виде матрицы перехода $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, с любой нормой $||\cdot||$ для $\mathbb{R}^{n \times n}$, которая индуцируется скалярным произведением и управляется любым вероятностным вектором π. В таком случае составляется уникальная транзитная матрица P^*, которая обратима в соответствии с π и которая является ближайшей к P в соответствии с нормой $||\cdot||$. Матрицу P^* вычисляют путем оптимизации. Для этого можно решать задачу квадратично-выпуклой оптимизации по Нестерову (Нестеров, 2010). Простейшим видом необратимой цепочки Маркова является следующий (Рис. 1 – крайний левый) с первым состоянием (1), вторым состоянием (2) и третий состоянием (3) и соответствующими вероятностями перехода между состояниями (см. примеры для среднего и крайне правого вариантов рис.1).

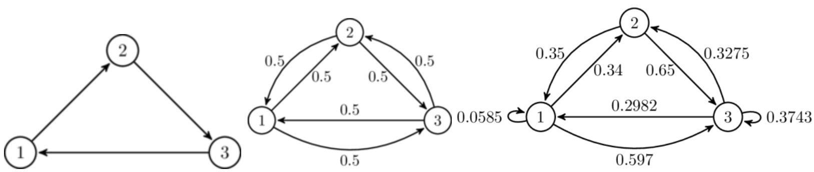

Рис. 1. Цепи Маркова: необратимая и обратимая – управляемая векторной нормой 1 и 2

Поскольку нормы в линейном пространстве матриц связаны с соответствующими векторными нормами, то посредством векторной нормы можно перевести цепочку в обратимую в соответствии с вектором π. Рыночным смыслом такой векторной нормы является

Пример векторных норм (Рис. 1 – первый и второй вариант векторной нормы).

Первый вариант. Если $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, то вероятность каждого перехода будет составлять 0,5 (Рис.1 – средний).

Второй вариант. Если вектор вероятности будет $\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, то ближайшая обратимая марковская цепь в соответствии с векторной номой будет выглядеть так, как показано на крайнем правом рисунке – Рис. 1. Каждый переход имеет свой вариант вероятности.

Предположим, что цены на финансовом рынке движутся определенным образом. Пусть P будет переходной матрицей их движения $\{x_0, x_1, \dots\}$. Состояние i имеет период $k \geq 1$, если любая цепочка, начинающаяся с состояния i и возвращающаяся к тому же состоянию i с положительной вероятностью, то для этого необходимы некоторые действия, которые зависят от k – например, изменение базовой процентной ставки. Если $k = 1$, то состояние рынка определяется как апериодическое, то есть либо переходное от одного к другому состоянию (новым ценовым уровням), либо монотонно стремящееся к установившемуся значению. При $k > 1$ состояние рынка можно отнести к периодическому, то есть определенным образом упорядоченному. В таком случае периодической функцией цены является повторяющееся ее значение в ходе, например, одной торговой сессии, то есть для нее справедливо следующее $f(x) = f(x + nT)$. Данное уравнение характеризует колебательные движения цен с периодом *T*. К периодическим цепям можно отнести колебание базовой процентной ставки, которое совершают центральные банки с заданным интервалами в ходе регулирования экономического цикла, инфляции и занятости.

Пространственное распределение ценовых событий интересно при пространственном арбитраже. В таких случаях получает развитие хеджирование ценовых колебаний за счет организации торгов в разных финансовых центрах. Так, мировые финансовые центры можно представить в виде локально взаимодействующих цепей Маркова. Например, финансовый центр (множество) *X* и финансовый центр (множество) Y. В математике это соответствует ситуации, когда пространство состояний имеет декартову форму произведений двух множеств – $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные пары (x, y) для всевозможных $x \in X$ и $y \in Y$. Данное множество, если рассматривать валютные рынки в разных центрах, имеет топологическую структуру, а рынки акций можно рассматривать с алгебраической структурой, поскольку сложно представить наличия самоподобия для рынков акций разных стран. Таким образом, $X \times Y = \{(x, b) \mid x \in X$ и $y \in Y\}$.

Таким образом, с формальной стороны относительная простота схем и наглядность результатов позволяют цепочкам Маркова стать важным инструментом прогнозного моделирования состояний рынка. Тем не менее при определении состояний, а также оценке устойчивости наибольший интерес представляет анализ финансовых рынков с позиции скрытой модели Маркова.

5. Скрытая модель Маркова

Одним из первых примеров применения скрытых марковских моделей является оптимизация инвестиционных портфелей (1950-е гг.), которая была проведена Гарри Марковицем, Нобелевским лауреатом 1990 г. (Elliott, Mammon, 2014, p. 7).

Скрытые марковские модели широко используются в различных программах распознавания финансовых транзакций, поскольку они позволяют легко моделировать временную эволюцию одного признака или набора числовых признаков, извлеченных из большого массива данных. Выделение набора функций и связанных с ними функций вероятностей выбросов является ключевой задачей таких вычислений. К более сложным задачам относится анализ поведения биржевых игроков. В таких случаях основная работа сводится к разработке метода, который позволяет анализировать различные типы поведения – если они очень похожи между собой либо полностью отличаются друг от друга, а также при сложных сценариях – в период рыночной эйфории. Основными проблемами, возникающими при моделировании поведения на таких рынках, являются следующие: окклюзии, тени и шум, резкие смены поведения, повышенная скрытость агентов в сочетание с внешней их открытостью и повышенной эмоциональностью.

В таких случаях основная проблема заключается в делении всей информации на наблюдаемую и ненаблюдаемую. Последняя может быть предполагаемой и скрытой от наблюдений либо полностью отсутствующей. Тогда ее наличие не предполагается. До недавнего времени такая информация не включалась в предмет строгого научного анализа и не подпадала под количественную оценку как в виде вероятности ее поступления, так и вероятности влияния на поведения агентов и состояние рынка. Такая информация если и принималась в процессе принятия решения, то в виде экспертной оценки и чаще всего использовалась агентами интуитивно.

Привлечение моделей Маркова позволило подключить новую информацию в процесс принятия решений и перевести ее на язык математики. В результате появляется возможность автоматизировать многие финансовые операции. Например, перевести процесс принятия решений в рекомендательные системы или высокочастотные торговые системы. Скрытые модели Маркова позволили не только привлечь к анализу скрытую информацию финансового рынка, но и перевести его математический процесс вычислений, максимально удобный и количественно определенный. Одно из наиболее полных исследований скрытых моделей Маркова в концептуальном и прикладном виде было проведено в 2008 г. Робертом Эллиоттом, Агдаром Аггауном и Джоном Мура – «Скрытые модели Маркова: оценка и контроль (стохастическое моделирование и прикладная вероятность» (Elliott, Aggoun, Moore, 2008). Так, Роберт Эллиотт разработал наиболее востребованные визуальные и прикладные принципы технического анализа, в частности, принципы и волны Эллиотта (Ключников, Ключников, 2022), повсеместно используемые брокерами в процессе ценообразования и определения чаще всего краткосрочных тенденций на рынке (Elliott, Kopp, 2004). Другой не менее интересный анализ скрытых моделей Маркова опубликован в 2009 г. (второе переработанное издание вышло в 2016 г.) – «Скрытые модели Маркова для временных рядов: введение использования R» (Zucchini, MacDonald, 2016). Третья работа была издана в 2017 г. Она была посвящена проблемам алгоритмического моделирования памяти – «Модели Маркова: введение в цепи Маркова, скрытые модели Маркова и байесовские сети» (Pellicciari, Dahling, 2017).

В данной статье проведена попытка применить марковский процесс для анализа не столько открыто наблюдаемых, сколько скрытых – ненаблюдаемых данных финансовых рынков. Частично данная проблема была рассмотрена в работе «Скрытые модели Маркова в финансах» (Elliott, Mammon. 2007). В указанной работе были рассмотрены некоторые специфические проблемы марковских подходов к процессу принятия решений на глобальных финансовых рынках. В частности, в ней рассматривались вопросы ценообразования опционов, моделирования кредитных рисков и оценки волатильности. В данной статье основное внимание уделяется проблемам состояния финансовых рынков и оценкам поведения его участников, которые не были предметом исследования в вышеуказанной работе. Кроме того, после ее издания использование методов Маркова в финансах получило дальнейшее развитие, что потребовало дополнительного анализа (в частности, расширилось использование механизмов оптимизации, проверки результатов, сравнительного анализа результатов разных моделей и методов).

Скрытые модели Маркова применяются в случаях отсутствия основной информации о рынке. Тем не менее имеются данные, например, о последовательности операций, при этом мотивы действий игроков неизвестны. Интерес к подобным исследованиям возрос в связи с ускоренным внедрением в финансовую сферу интеллектуальных систем. При отсутствии или недостаточной информации о поведении участников рынка нельзя с определенностью ответить на изменения состояний рынка – переход цен к росту или падению. В результате возникает необходимость «растягивать» вычисления (подключать косвенные данные, способные определять вероятность тех или иных ожиданий) и постоянно подводить текущую информации к вычислительным процедурам – рассчитывать многочисленные сценарии для каждого конкретного временного отрезка. При этом необходимо решить, по крайней мере, две основные проблемы: (1) с учетом наблюдаемого набора действий определять лучший процесс вычислений, который подходит для достижения возможных результатов (выбор модели); (2) определять лучший путь, который необходимо пройти (выбор процесса моделирования).

Если известно, как выглядит рынок, но неизвестно поведение его участников, то для вычислений лучше воспользоваться скрытой марковской моделью (Resch, 2018). Используя климатическую модель, предложенную Марком Стэмпом (Stamp, 2018), разработанную на базе марковских цепочек, можно продемонстрировать поведение финансовых рынков – своеобразные «климатические» изменения (переходы) на рынках. Представим модель, в которой определяем три состояния финансового рынка: $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, первое состояние – $S_1 = \text{рост}$, $S_2 = \text{падение}$, $S_3 = \text{стагнация}$. Для того чтобы установить переход одного состояния в другое и соотношения между различными состояниями, необходима соответствующая информация – необходимые данные. Можно использовать следующую последовательность состояний: $q_1, q_2, q_3, \ldots$, где $q_i \in \{\text{рост}, \text{падение}, \text{стагнация}\}$.

Для того чтобы вычислить вероятность рыночных изменений, можно использовать свойство Маркова: $P(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{i=1}^{n} P(q_i | q_{i-1})$.

<u>*Предположение 1:*</u> Учитывая текущее состояние рынка как рост, вероятность того, что на следующий день будет продолжаться рост, а через день падение, можно определить следующим образом:

$$P(q_2, q_3 | q_1) = P(q_2 | q_1) P(q_3 | q_1, q_2)$$
$$= P(q_2 | q_1) P(q_3 | q_2)$$
$$= P(\text{рост} | \text{рост})\ P(\text{падение} | \text{рост})$$

<u>*Предположение 2*</u>: при текущем состоянии рынка в виде падения вероятность того, что на следующий день будет рост, следующая:

$$P(q_3 | q_1, q_2) = P(q_3 | q_2)$$
$$= P(\text{рост} | \text{стагнация})$$

Таким образом, модель Маркова позволяет моделировать временные или последовательные данные, то есть упорядоченные множества. Она представляет возможность сравнивать текущую рыночную информацию (рост, падение или стагнацию) с предшествующей информацией. Модель включает состояния и схемы перехода между состояниями, а также распространение результатов (механизм распространения возможет дискретный или непрерывный).

Посредством цепей Маркова можно определять также скрытые состояния модели. Каждое состояние обладает своим выходным значением, которое следует вносить в соответствующую модель. В таком случае можно только по косвенным данным судить об изменениях на рынке.

<u>*Демонстрация последовательности*</u>

Пример I: скрытая модель Маркова.

Существует некоторое состояние финансового рынка (*x*), которое меняется со временем (по Маркову). Необходимо оценить или отследить развитие рынка. К сожалению, невозможно напрямую наблюдать состояние (оно скрыто). Но можно наблюдать состояние *y* – движение цен, - которое связано с состоянием *x*. Например, необходимо узнать ликвидность рынка *x*. В таком случае можно определить движение цен (*y*) и оборот рынка, которые коррелируют с внутренним состоянием (*x*). Ликвидность (*y*) определяется не обязательно через предложения финансовых активов на продажу. Возможно, они не находят спроса. В таком случае модель должна определить вероятность ликвидности, когда есть повышенное предложение на рынке, но отсутствует спрос, и тогда, когда есть спрос, но нет предложения. Вероятность результата (ликвидности или ее отсутствия) представлена линией от *x* до *y*.

Возможны два варианта: завтра предложение на рынке всегда находит спрос, а через день предложение не подкрепляется спросом. Чтобы учесть время, в модель необходимо включить дополнительный элемент. Он должен указать вероятность того, что вслед за отсутствием спроса возникнет спрос или предложение сократится. В результате возникает вероятность перехода. Она представляется линией от одного узла *x* к другому – *y*. Последовательность действий, предложенных на рисунке (рис. 2), представляет собой простую и достаточно выразительную модель динамических систем, которую можно применять для отслеживания состояния финансового рынка. Данная модель строиться с учетом фильтров Калмана (Wells, 1996), которые позволяют оценивать ее параметры и внутреннее состояние рынка.

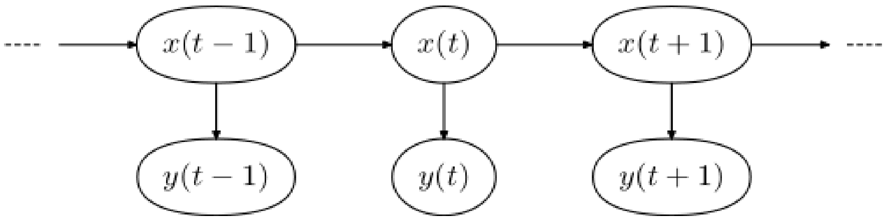

Рис. 2. Модель поэтапной оценки состояния рынка (марковский процесс)

Посредством серии измерений, производимых с течением времени, устраняются шумовые статистические воздействия. В результате внимание сосредотачивается на господствующих тенденциях. Посредством такого приема повышается точность расчетов по сравнению с единичным измерением. Из-за временной задержки между измерениями на рынке и происходящими изменениями использование фильтра Калмана позволяет поддерживать реалистичную картину как текущего состояния рынка, так и прогнозного. При этом алгоритм работает двухэтапным образом: прогнозным – фильтр Кальмана позволяет производить оценки текущих переменных состояний вместе с их неопределенностями; проверочным – после получения результата производятся следующие измерения (при этом допускаются искажения и ошибки, которые постепенно исправляются) (Data, Ponomareva, 2015). Оценки постоянно обновляются с использованием средневзвешенного значения. Причем больший вес придается оценкам с большей достоверностью.

Пример II: два варианта: цепи Маркова / скрытая модель Маркова

Например, поступает информация об изменении капитализации рынка – меняются два значения: биржевой оборот растет / сокращается, и по ним надо определить рост или падение цен на рынке.

Предположим, что прошло t дней. Смоделировать и рассчитать вероятность можно следующими способами: посредством цепи Маркова и скрытой модели Маркова.

Последовательность наблюдений во времени t $O = \{O_1, \ldots, O_t\}$, где $O_i \in \{\text{рост биржевого оборота, сокращение}\}$. Каждое наблюдение происходит при неизвестном состоянии. К тому же рост биржевого оборота может быть связан как с ростом цен, так и падением. Во втором случае рост оборота происходит в силу распродажи по низким ценам активов в случае предполагаемого спада. Поэтому также будет неизвестная последовательность: $Q = \{q_1, \ldots, q_t\}$, где $q_i \in \{\text{рост, падение}\}$. Но необходимо узнать следующее: $P(q_1, \ldots, q_t | O_1, \ldots, O_t)$.

<u>*Байесовсий подход*</u>

Скрытая модель Маркова может быть представлена как простейшая динамическая байесовская сеть доверия (Liu, 2020). Скрытая модель Маркова тесно связана с более ранней работой по проблеме оптимальной нелинейной фильтрации, проведенной российским ученым Русланом Леонтьевичем Стратоновичем. Он первый провел стохастические исчисления (теория стохастических дифференциальных уравнений) и описал процедуру «прямого-обратного» хода (Стратонович, 1966). Его алгоритм применяется при расчетах скрытых моделей Маркова (Ghahramani, 2001). Матрица переходных значений вероятностей для случайной переменной X_t записывается следующим образом: $P(X_t|X_{t-1})$. При этом все скрытые состояния модели представлены в другой матрице. Для всех скрытых состояний дана последовательность наблюдений, а именно: $O_{t-1} := O_1, \dots, O_t$. Апостериорная вероятность из распределения случайных событий выглядит следующим образом: $X_k \in \{X_1, \dots, X_t\}$.

Из теоремы Байеса можно получить вероятность для состояния финансового рынка в определенный момент времени: $P(q_i|O_i) = \frac{P(O_i|q_i)P(q_i)}{P(O_i)}$.

Для временной последовательности t вероятность рассчитывается следующим образом: $P(q_i, \dots, q_t|O_i, \dots, O_t) = \frac{P(O_1,\dots,O_t|q_1,\dots,q_t)P(q_i,\dots,q_t)}{P(O_i,\dots,O_t)}$.

Цепь Маркова. С помощью свойства Маркова можно рассчитать вероятность по следующей формуле: $P(q_1, \dots, q_t) = \prod_{i=1}^{t} P(q_i|q_{i-1})$. Предположение независимых наблюдений: $P(O_1, \dots, O_t|q_1, \dots, q_t) = \prod_{i}^{t} P(O_i|q_i)$.

Таким образом: $P(q_1, \dots, q_t|O_1, \dots, O_t) \propto \prod_{i=1}^{t} P(O_i|q_i) \prod_{i=1}^{t} P(q_i|q_{i-1})$.

Следующие параметры:

- вероятности перехода $P(q_i|q_{i-1})$;

- вероятности результатов $P(O_i|q_i)$;

- начальные вероятности состояний $P(q_i)$.

Параметры скрытой модели Маркова.

Скрытая модель Маркова управляется следующими параметрами: $\lambda = \{A, B, \pi\}$, где

матрица вероятности переходного состояния A;

вероятности условного результата наблюдения / состояния B;

начальные (предшествующие) вероятности состояния π.

Определение фиксированного числа состояний рынка (N): $S = \{S_1, \dots, S_n\}$.

Матрица вероятности переходного состояния:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1 \text{ (для каждой строки)} \\ a_{ij} = P\left(q_t = s_j \middle| q_{t-1} = s_i\right), \quad 1 \leq i, j \geq N. \\ a_{ij} \geq 0 \end{matrix}$$

$a_{ij} \rightarrow$ переходная вероятность от состояния s_i к состоянию s_j .

Вероятности результатов: каждое состояние генерируется наблюдениями (результатами), но решение принимается в соответствии с моделированием результатов, то есть либо дискретным, либо непрерывным методом.

Дискретный метод.

Цепь Маркова является дискретным процессом, в котором следующее состояние зависит только от текущего состояния. Такой подход полностью совпадает с оценкой циклического развития, выдвинутой в книге «Макроэкономика, Кредитные и биржевые циклы» (Ключников, Ключников, 2017).

Набор наблюдений: $V = \{v_1, \dots, v_w\}$

Каждое текущее состояние рынка – s_j через процессы (торги) $b_1(v_1), \dots, b_1(v_w)$ подводится к следующим новым состояниям рынка: $v_1, \dots, v_w$. Весь переход можно записать следующим образом:

$b_i(v_k) = P(o_t = v_k | q_t = s_i,$ при $1 \leq k \leq W$.

$$B = \begin{bmatrix} b_1(v_1)\, b_1(v_2) & \cdots & b_1(v_w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_N(v_1)\, b_N(v_2) & \cdots & b_N(v_w) \end{bmatrix}.$$

Начальные (предыдущие) вероятности: вероятности запуска последовательности наблюдений в состоянии q_i имеют следующий вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_N \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \pi_1 = P(q_1 = s_i), \quad 1 \leq i \leq N \\ \sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1 \end{matrix}.$$

Поиск наиболее подходящих состояний можно провести с помощь особого алгоритма Витерби (Elliott, Lau, Miao, 2012), посредством которого определяется наиболее вероятная последовательность событий.

Процедуры декодирования и проверки скрытых состояний

Технология работы со срытыми состояниями системы включает декодирование неявных и полностью скрытых состояний и параметров, а также проверку результатов (Cartea, Jaimungal, Penalba, 2015)[7]. В частности, появляются возможности решать проблемы обратных связей, что повышает точность измерений и меняет отношение к проверке результатов моделирования. Дело в том, что цифрация выводит исследователей на новый уровень использования данных. В условиях перехода финансов на Большие данные, с одной стороны, появляются новые возможности, с другой стороны, ставятся повышенные задачи перед исследователями финансовых колебаний. Ярким примером резкого расширения данных, используемых в моделях, является широкий переход к высокочастотной торговле. Алгоритмическая обработка рыночных ситуаций, происходящих в каждые сотые доли секунд, позволяет учитывать малейшие ценовые колебания. При таких условиях возникают новые требования к прогнозным оценкам ценовых колебаний и оценке устойчивости. В результате необходим поиск новых подходов к решению основных проблем ценовых колебаний. Во всех случаях важны первоначальные условия, соответствующие алгоритмические процессы, на основании которых предоставляются необходимые результаты.

Главная цель декодирования – более полное понимание рыночного поведения участников. Особенность метода – применение интенсивных вычислительных приемов (включая алгоритмы машинного обучения – в данной статье данная проблема не рассматривается) при переходе финансов на Большие данные. На наш взгляд данное направление неправильно было бы относить чисто к вычислительным финансам, поскольку оно включает проблематику информатики и искусственного интеллекта, позволяющие полнее подойти к решению проблемы рыночного поведения. Интересен анализ рыночного поведения, например, по аналогии с анализом физиологических сигналов, применяемым в биоинформатике или построении искусственного интеллекта.

Декодирование последовательности состояний (алгоритм Витерби)

[7] Скрытые и необозреваемые параметры финансового рынка можно анализировать также с других позиций, в частности, с позиции энтропии и/или неопределенности системы, а также теории динамического хаоса. Однако такие исследования выходят за рамки данной статьи, они имеют самостоятельное значение и будут разрабатываться авторами в дальнейшем.

В рамках цепи Маркова можно декодировать скрытые состояния и оценить вероятностную последовательность таких событий посредством алгоритма Витерби («форвард-Витерби»). Если первоначально его использовали для декодирования сверточных кодов мобильных телефонов, то постепенно перешли к использованию также при распознании речи и моделировании интеллектуальных процессов, в частности, в диалоговых финансовых рекомендательных системах. В данной статье предлагается его использовать в качестве своеобразной финансовой лингвистики для решения проблем финансовой информатики, то есть как вычислительную методологию, позволяющую управлять сложными финансово-информационными системами путем предсказания пространственной структуры рыночного поведения и последовательности изменений ее состояния в ходе рыночных торгов (колебаний).

Структурная информация о рынке позволяет распознавать отдельные состояния рынка, а также проводить и оценивать последовательность их переходов. Как правило, состояния чередуются с определенной регулярностью, но точное совпадение любых состояний практически невозможно. Чередования можно описать с позиции циклического моделирования и теории хаоса, то есть поведения динамической системы, которая очень чувствительная к начальным условиям. В таком случае последовательность состояний можно представить в виде графиков для каждого момент времени, при которых разное время имеет фазовое пространство, то есть множество всех состояний системы представлено так, что каждому возможному состоянию системы соответствует одна точка в этом пространстве. Тогда динамика системы представлена в виде движения точек. В таком случае каждое состояние – это соответствующая «точка». Но в отличие от точки в физических системах в финансовых системах «точка» также подвержена изменению, и в ней происходят различные преобразования. В этом плане полностью применить физические и математические законы фазового пространства к финансовой сфере невозможно, но тем не менее они позволяют наблюдать за перемещением состояния системы (движение точек), но не анализировать изменения в самих состояниях (в точках).

Применяя метод декодирования последовательности состояний рынка для скрытой модели Маркова можно найти наилучшую последовательность каждого состояния следующим способом: $Q = q_1, \dots, q_T$.

В ряде случаев возможно применение упрощенного и нестрогого варианта алгоритма Витерби. Например, генерируются только следующая последовательность цен: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. Но рынок генерирует только следующие сигналы: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$. В таком случае вероятность перехода цены от 1 к 2 равна нулю ($1 \rightarrow 2 \neq 0$), а вероятность $1 \rightarrow 3 = 1$, то есть 100%-ное прохождение. В таком случае обнаруживается ошибка, и для ее устранения 2 заменяется на 3, то есть к сводится к трем ($1 \rightarrow 3$). Следующий шаг еще проще – $3 \rightarrow 5$, и он воспринимается как истина. Такие рассуждения достаточно тривиальны, но при больших объемах информации они необходимы и не столь просты.

Можно представить следующий путь применения алгоритма. Предположим, при торговле на бирже с открытым доступом в зале три дня подряд. Обнаруживается, что в первый же день в зале очень много брокеров, на второй день меньше брокеров, но все они активно торгуют, а на третий день мало брокеров и их активность слабая. Из этой последовательности наблюдений можно сделать много выводов и найти вероятность разных последовательностей. Однако интерес представляет следующее: какова наиболее вероятная последовательность роста / падения цен, которая могла бы объяснить эти наблюдения? Очевидно, можно перечислить все возможные последовательности скрытых состояний – вычислить вероятность выходной последовательности для каждого наблюдения и, наконец, подобрать наиболее вероятную. Тем не менее предположение, что лежащий в основе процесс (ликвидность) имеет марковские свойства, то есть вероятность каждого состояния зависит только от предыдущего, позволяет решить этот вопрос, используя гораздо более эффективный метод – алгоритм Витерби.

Алгоритм Витерби работает следующим образом

Для каждого последующего наблюдаемого выхода и каждого возможного скрытого состояния необходимо отслеживать:

• относительную вероятность,

• наиболее вероятные последовательности скрытых состояний.

Процесс обновления с одного наблюдаемого выхода на следующий включает в себя полученные ранее вероятности, перемноженные на соответствующие вероятности a_{ij} перехода и вероятность излучения $b_i(o)$. Для генерации значений для этих вероятностей необходимо использовать метод контролируемого обучения, при котором выдвигается положение и проводится его соответствующая маркировка. Для этого проводят вычисления возможных выбросов следующим образом: $b_i(o) = \frac{Count(i \to o)}{Count(i)}$, где *Count(i)* – количество маркировок i во время проверочного теста и $Count(i \longrightarrow o)$ – промежуток времени, в рамках которого наблюдалась повышенная ликвидность вместе с ростом цен для случаев i. Однако при повторных вычислениях, если использовать для маркировки уже другое событие – $b_i(o)$, то можно наблюдать различия в результатах, которые не наблюдались при нахождении значения b_i. В таком случае значение для b_i будет оцениваться следующим образом (для этого используем такой в целом байесовский прием, как алгоритм сглаживания Лапласа, который применяется в машинном обучении):

Если $y \in \{1,2,\dots,k\}$, то $P(y = j) = \frac{\sum_{i=1}^{m} L\{y^i = j\} + 1}{m + k}$, где L – вероятностное состояние. Поэтому в данном случае для вероятности излучения $b_i(o)$ состояние будет переоценено следующим образом: $b_i(o) = \frac{Count(i \to o) + 1}{Count(i) + n}$, где n число соответствующих маркировок (количество перерасчетов) после пробного вычисления. Наиболее вероятностная последовательность скрытых событий для данных наблюдений является следующей: рост цен / падение цен / постоянные цены.

Оценка последовательности наблюдений (алгоритм «прямого-обратного» хода).

Первоначально алгоритмы «прямого-обратного хода» были использованы для оценки параметров в скрытой марковской модели для анализа вероятностного контента грамматических правил английского языка (1979 г.) – стохастической контекстно-свободной грамматики. В дальнейшем их стали применять для прогнозирования структур в биологии (например, ДНК), а потом структур при создании искусственного интеллекта для проверки сохраняемой после установления первичной их последовательности.

Для финансового рынка данный метод означает возможность первичного установления структуры конкретного рыночного состояния, а потом проверка этой структуры посредством алгоритма «прямого-обратного хода».

С этой целью можно пользоваться различными прикладными алгоритмами, в частности, открытыми и закрытыми алгоритмами (Collins, 2018), сферой применения которых в последнее время стали описание потенциальных функций при структуризации проблемы по принципу дерева целей.

Оценка последовательности наблюдений $O = o_1, \dots, o_T$ с учетом нескольких альтернативных скрытых моделей Маркова позволяет определять, какая из них лучше всего распознает последовательность наблюдения, то есть проводится своеобразная классификация наблюдений. С этой целью составляются матрицы переходных состояний финансового рынка – $\boldsymbol{T}$, в которых индекс столбца i представляет целевое состояние, а индекс строки j – начальное состояние. Переход от состояния r-вектора π_t к инкрементному состоянию вектора π_{t+1} записывается следующим образом: $\pi_{t+1} = \pi_t \boldsymbol{T}$. Пример ниже представляет собой систему, в которой вероятность пребывания в одном и том же состоянии после каждого шага составляет 70%, а вероятность перехода в другое состояние – 30%. Тогда матрица перехода, следующая: $T = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$.

В рамках построения алгоритма «прямого-обратного» хода в ряде случаев целесообразно заниматься построением дерева целей, которое в принципе является частью особого вида скрытой модели Маркова, которую называют «иерархической скрытой марковской моделью» или «многоуровневой скрытой марковской моделью» (Murthy, 2001).

Когда активизируют скрытые от наблюдения данные, то активизируется вероятностная модель, то есть активизируется одно из состояний базовой скрытой марковской модели (состоящее из наблюдаемой – базовой – части и ненаблюдаемой). Таким образом, происходит возвращение обращения к базовым параметрам и их уточнение после определения вероятностей скрытой части параметров. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет активировано специальное состояние, которое определяется как производное от базового. Когда происходит выброс управляющих сигналов от производного состояния, то происходит уточнение вероятностей событий и новых состояний.

Другим важным условием работы алгоритма «прямого-обратного» хода являются вертикальные переходы. Активация внутреннего состояния в модели осуществляется посредством вертикального перехода. После завершения вертикального перехода происходит горизонтальный переход в состояние в пределах одного уровня. Когда горизонтальный переход приводит к завершающему состоянию, управление возвращается в следующее по иерархической лестнице состояние модели, что ведет к последнему вертикальному переходу. Вертикальный переход может привести к серии вертикальных переходов вплоть до оценки последовательности необходимых состояний и, наконец, возвращения на верхний уровень.

Шлейф памяти – элемент дерева скрытой марковской модели. Особые двух- и многоуровневые алгоритмы разных уровней иерархической скрытой марковской модели. Многократная теория следов. Математическая формулировка следов позволяет повысить уровень достоверности вероятностных оценок, поскольку происходит многократная проверка результатов – сначала по прямым данным, потом постепенно по более косвенным и вторичным, что коррелирует результаты.

Предположим, что необходимо определить завтрашнее состояние рынка с помощью алгоритмов «прямого-обратного» хода. Для этого оцениваются, например, три возможных скрытых состояния: изменение цены на нефть (до сих пор не было никаких оснований узнать о возможности их изменений), крушение крупного биржевого обменника биткоинов, хакерская атака на высокоскоростную торговлю на крупнейшей в мире фондовой бирже.

Алгоритм «прямого-обратного хода» объединяет две группы рассуждений:

1. Рассуждение основано на прошлом. Собственно память и учет прошлого не свойственен цепям Маркова, но для данного алгоритма, который проверяет достоверность результатов, он не только вполне приемлем, но и является важным элементом. Поэтому необходимо ввести в модель данные о предшествующих событиях и циклах. Глубина исторического проникновения

может быть разной. Релевантность первого события (ценовой шок) рассматривается так: $O_1 O_2, O_3$ .... Вероятность крушения обменника можно рассчитать; поддаются расчетам его последствия – имеются соответствующие исторические аналоги. Что же касается хакерской атаки, то в финансовой сфере уже несколько лет разработаны различны алгоритмы, которые учитывают такую вероятность. Следовательно, с учетом прошлого опыта вычисляются будущие вероятности, например, возьмем первую вероятность за 50% и две последующие по 25% для каждой.

2. Рассуждение и поиск причин основаны на оценке прошлого и поиск в нем будущего – оценка вероятности наступления как всех событий, так и каждого события в зависимости от другого. Необходимо посмотреть на события, предшествовавшие предыдущим падениям цен на нефть. Эти события открыты: к ним отнесем, например, следующие – $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3$. К скрытым событиям относятся следующие: 1) возможные новые события шокового изменения цен – $\mathrm{O}_4, \mathrm{O}_5 \mathrm{O}_6$; 2) возможность событий, связанных с крушением обменника – $\mathrm{O}_7, \mathrm{O}_8, \mathrm{O}_9$; 3) события, которые могут воздействовать на хакерскую атаку – $\mathrm{O}_{10}, \mathrm{O}_{11}, \mathrm{O}_{12}$. Существует вероятность для каждого наблюдения, которую надо определить, а потом их ранжировать в общей системе и на этой основе определить общую вероятность.

Процедура поиска наиболее вероятного состояния в последовательных множествах состояний начинается с составления матрицы переходных состояний и вычислений вероятных их последовательностей с применений рекурсий, но с постоянным возвращением к «победившему» или лучшему состоянию в каждой «ознакомительной» вычислительной операции. Так постепенно подходят к «самому лучшему из лучших» вариантов – победительной вероятности. Итак, весь алгоритм Витерби может быть интерпретирован как поиск в матрице узлов, которые образованы состоянием скрытой марковской модели в каждом моменте времени t при$1 \leq t \leq T$, организация вычислительной работы по оптимизации с этими узлами, в рамках которой находится лучший вариант решений.

Важной проблемой алгоритма является «медлительность» – требуются большие затраты времени и продолжительные вычисления, а результаты слабо меняются после проведения каждого последующего вычисления. Другой проблемой является установление локальных максимумов. Дело в том, что при каждой попытке выделяются частные локальные максимумы. Задача заключается в их сведении в общий или средний, что нередко ведется через нулевую программу, которая фактически сводит все значения и устраняет колебания.

Вероятность и условия перехода

Определение вероятности перехода различных состояний имеет важное значение для оценки колебаний финансового рынка – количественной их характеристики.

На рынке наблюдаются многочисленные переходы, рассредоточенные во времени. Поскольку экспоненциальное распределение не обладает памятью, будущий рыночный результат зависит только от текущего состояния рынка и не зависит от того, когда произошел последний переход и / или какое было предыдущее состояние.

Обозначим состояние рыночной системы в момент времени t в виде соответствующей функции *X(t).* Вероятность состояния в момент времени t – вероятность того, что система находится в состоянии j в момент времени t, что имеет следующий вид: $p_j(t) = \Pr\{X(t) = J\}$.

В таком случае устойчивое состояние рынка или ограниченная вероятность его существования в состоянии j выглядит так: $p_j(t) = \lim_{t\to\infty} p_j(t)$.

Вектор же стационарного состояния: $\vec{p} = [\, p_0, p_1, p_2 \ldots \,]$.

Для цепи Маркова непрерывного времени можно определить матрицу интенсивности или скорости перехода Q. Элементы q_{ij} от общей скорости Q указывают скорость переходов из состояния i в состояние j для $i \neq j$. Другими словами, время перехода к состоянию j с учетом того, что процесс находится в состоянии i, экспоненциально распределяется с параметром скорости q_{ij}. Если $i = j$, то q_{ij} рассчитывается по следующей формуле: $q_{ij} = -\sum_{j\neq 1} q_{ij}$.

Стационарные вероятности можно вывести из Q следующим образом: $\vec{p} \cdot Q = 0$ при этом $\sum_i p_i = 1$.

Вероятность перехода и ожидание конкретных состояний рынка, то есть колебательных изменений, напрямую не детерминирована его динамикой, хотя последняя в ряде случаев играет определенную роль. В целом вероятность перехода между различными состояниями имеет важное значение для определения хода финансового цикла, поскольку выявление переходного состояния – состояния (или серия состояний), которое подготавливает переход от одной фазы цикла к другой – позволяет заметить смену вектора развития.

В текущем десятилетии в теории ценообразования финансовых активов получает развитие новое направление, занимающееся оценкой различных состояний цены финансовых активов, эволюционирующей (а в ряде случаев революционизирующей) во времени. Оценка динамики цен позволяет более точно и на постоянной основе рассчитывать колебаний цен как в текущем времени, так и в перспективном. Таким образом, появилась возможность повысить надежность прогнозирования расчетных цен, что необходимо для создания условий для поддержания их устойчивости.

В основе развития знаний вероятности движения цен было по меньшей мере два различных обстоятельства. С одной стороны, к концу прошлого – началу нынешнего века были созданы теория марковских процессов, теория стационарных процессов, теория мартингалов, теория предельных теорем для случайных процессов, а с недавнего времени к ним стала также относиться теория информации. С их помощью появилась возможность заняться оценкой случайных процессов при формировании цен финансовых активов и перейти к анализу на новом уровне колебаний цен и поиску вариантов и условий их устойчивых и переходных состояний. С другой стороны, цифрация и переход отрасли на Большие данные вместе с развитием алгоритмов высокочастотной биржевой торговли и обработки слабоструктурированных и Больших данных подготовили соответствующую основу для использования новых методов работы с такими случайными процессами, как динамика финансового рынка и его цен (Sigova, Vasiliev, Klyuchnikov, 2017).

6. Выводы

Финансовая нестабильность и рыночная неопределенность выдвигают новые требования к анализу финансовых рынков и знаниям законов их функционирования. Широкое использование моделей Маркова является своеобразным ответом на современные вызовы, которые постоянно генерируют финансовые рынки. В качестве концептуальной основы для изучения состояний и колебаний финансового рынка модели Маркова выбраны не случайно. С одной стороны, они являются естественным расширением конечного состояния рынка и представляют собой важную концептуальную основу оценки вероятности различных состояний рынка. С другой стороны, представляют собой алгоритмы, которые позволяют анализировать не только изменения цен, инвестиционных портфелей, банковских процентов, но и переходных состояний рынков. В статье различия между марковскими цепями и моделями сводились к следующему: если первые строились на прямых зависимостях и наблюдаемых состояниях, то вторые исходили из их отсутствия. В статье акцент был сделан на изучении ненаблюдаемых и скрытых состояний и параметров рынка. При этом ставились и решались три главные задачи: оценка рынка (узнавание рынка), декодирование скрытых его состояний (второй этап узнавания рынка – узнавание необозреваемых его частей и состояний, а также сегментация открытых частей рынка и дальнейшее узнавание уже отдельных частей, которые традиционным способом не удается наблюдать) и оптимизация и проверка результатов, в ходе которой рассматривались вероятности вероятностей последовательности различных состояний рынка. При моделировании временных рядов, когда предыдущие результаты имеют ограниченную актуальность и дискретны, модель без памяти имеет большие преимущества. При рассмотрении только текущего состояния рынка алгоритмы становятся очень масштабируемыми, стабильными, быстрыми и, что более всего ценно, универсальными.

В статье продемонстрированы оценочные и прогнозные возможности марковского метода анализа финансового рынка. Они сосредоточены вокруг четырех фундаментальных свойств рассматриваемого метода: возможность оценки текущего состояния рынка в каждый момент времени; возможность анализа событий «без памяти», с исходом, зависящим только от текущего состояния системы; возможность анализа ненаблюдаемых состояний и привлечение к анализу скрытых параметров рынка; возможность количественного учета ранее не поддающейся количественной оценки данных, что позволило параметризировать и применять расчетные процедуры как для качественной, так и некачественной и неструктурированной информации. В этом плане оценка вероятности состояний финансового рынка с марковских позиций существенно отличается от традиционной –

статистических временных рядов, в которой будущее состояние оценивается исходя, во-первых, из прошлых состояний рынка – истории его развития и предшествующего опыта, во-вторых, открытых и известных состояний и параметров рынка, в-третьих, количественных характеристик, дополняемых неформализованными качественными параметрами.

Список источников

1. **Ключников И.К.** Сценарии развития денежно-финансового хозяйства // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 5. Экономика. 2013. № 4. С. 110–129.

2. **Ключников И.К., Ключников О.И.** Макроэкономика. Кредитные и биржевые циклы. Москва: Юрайт, 2022. 279 с.

3. **Ключников И.К., Молчанова О. А., Ключников О.И.** Финансовые кризисы: теория, история и современность. СПб: СПБГЭФ. 2011. 258 с.

4. **Ключников И.К., Молчанова О. А., Ключников О.И.** Вероятность финансовой стабильности и безопасности: концепции и модели // Финансы и Бизнес, № 1, 2017. С. 70–81.

5. **Нестеров Ю. Е.** Методы выпуклой оптимизации. – М.: Изд-во МЦНМО, 2010. 281 с.

6. **Сигова М. В., Ключников И.К.** Теория финансовых инноваций. Критический обзор основных подходов // Вестник финансового университета, №6 (96), 2016. С. 85–96.

7. **Солодов А.К.** Основы финансового риск-менеджмента: учебник и учебное пособие. – М.: Издание Александра К. Солодова, 2018. 286 с.

8. **Соколов Е. В., Бородин Д. И.** Модели прогнозирования цен акций с применением функций Уоша и марковских цепей // Прикладная информатика, № 5 (28), 2010. С. 3–15.

9. **Стратонович Р. Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ, 1966. – 319 с.

10. **Ширяев А. Н.** Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. – М.: МЦНМО. 2016.

11. **Cartea A., Jaimungal S., Penalva J.** Algorithmic and High-Frequency Trading (Mathematics, Finance and Risk). Cambridge: Cambridge University Press, October 7, 2015. 356 p.

12. **Ching W-K., Ng M.K.** Markov Chains: Models, Algorithms and Applications. Springer, 2006. 208 p.

13. **Chorafas D.N.** Financial Cycles. Palgrave Macmillan, New York, 2015.

14. **Claessens S., Kose M.A., Terrones M.T.** Financial Cycles: What? How? When? IMF Working Paper 11/76. IMF, April 2011. 40 p.

15. **Coekho J.P., T.M. Pinho, Boaventura-Cunha J.** Hidden Markov Models. CRC Press, 2021. 282 c.

16. **Collins M.** The Inside-Outside Algorithm. 15 p. http://www.cs.columbia.edu/~mcollins/io.pdf. 22.04.2018.

17. **Date P., Ponomareva K.** Linear and nonlinear filtering in mathematical finance: a review // Journal of Management Mathematics. Vol. 27 (4), 2015. P. 1–18.

18. **Davison, M., Mammon R.S., Tenyakov A.** Modeling high-frequency FX rate dynamics: A zero-delay multi-dimensional HMM-based approach // Knowledge-Based Systems, Vol. 101, 1 June 2016. P. 142−155.

19. **Davison M., Mamon R., Tenyakov, A.** Filtering of a discrete-time HMM-driven multivariate Ornstein-Uhlenbeck model with application to forecasting market liquidity regimes // IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, Vol. 10 (6), 2016. P. 994−1005.

20. **Dixon M.F., Halperin I., Bilokon P.** Machine Learning in Finance: From Theory to Practice. 1st ed. Springer, 2020.

21. Due{Code}. Markov Models: Understanding Data Science, Markov Models and Unsupervised Machine Learning in Python. Kindler, May 27, 2017. 81 p.

22. **Elliott R., Aggoun L., Moore J.** Hidden Markov Models: Estimation and Control (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer, December 8, 2008 (1995). 382 p.

23. **Elliott R., Kopp E.** Mathematics of Financial Markets. Springer, October 8, 2004. 354 p.

24. **Elliott R.J., Lau J.W., Miao H.** Viterbi-Based Estimation for Markov Switching GARCH Model // Applied Mathematical Finance. Vol. 19 (3), 2012. P. 219−231.

25. **Elliott, Mammon**, (2007). Hidden Markov Models in Finance. Editors Elliott R., Mammon R.S. April 24, 2007. 186 p.

26. **Elliott, Mammon,** (2014). Hidden Markov Models in Finance: Further Developments and Applications. Vol. II. Eds. Mammon R.S., Elliott R., 2014. 280 p.

27. **Gagniuc P.A.** Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation. USA: John Wiley & Sons, 2017. P. 46−59 (235).

28. **Ghahramani Z.** An Introduction to Hidden Markov Models and Bayesian Networks // International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Vol. 15 (1), 2001. P. 9−42.

29. **Glasserman P.** Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer, 2003. 597 p.

30. Handbook of Markov Decision Processes. Editors Feinberg E.A., Shwartz A. Boston: Kluwer, 2002. 565 p.

31. **Harding D., Pagan A.** Dissecting the Cycle: A Methodological Investigation // Journal of Monetary Economics. Vol. 49, 2002. P. 365−381.

32. **Hassain A.** The Sentient Machine: The Coming Age of Artificial Intelligence. New York: Scribner, November 21, 2017. 224 p.

33. **Hull J.** Options, Futures, and Other Derivatives. Pearson India, 2017.

34. **Juselius M., Tarashev N.** When uncertainty decouples expected and unexpected losses. BIS Working Papers No 995. BIS, January 2022.

35. **Klioutchnikov I.K., Klioutchnikova A.I.** Long-Tail Data Financial Recommender Systems Embedded in Social Media // Proceedings of the 37th International Business Information Management Association (IBIMA), ISBN: 978-0-9998551-6-4, 30-31 May 2021, Cordoba, Spain, p 3850−3861.

36. **Kodres L.E., Pritsker M. A** Rational Expectations Model of Financial Contagion // Journal of Finance. Vol. 57 (2), 2002. P. 769−799.

37. **Liu B. A** Survey on Trust Modeling from a Bayesian Perspective // arXiv:1806.03916v7 [cs.CR] 11 Jan 2020, 2020. P. 1−41.

38. Markov Decision Processes in Practice. Editors Richard J. Boucherie, Nico M. van Dijk. International Series in Operations Research & Management Science. Volume 248. Series Editor Camulle C. Price. Springer International Publishing, 2017. 550 p.

39. Mathematics of Derivative Securities. Editors Michael A. H. Dempster and Stanley R. Pliska. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 600 p.

40. **Movahedi F., Coyle J.L., Sejdic E.** Deep belief networks for electroencephalography: A review of recent contributions and future outlooks // IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics, 14 July 2017. P. 697−710.

41. **Murphy K.P., Paskin M.A.** Linear time inference in hierarchical HMMs / NIPS'01 Proceedings of the 14th International Conference on Neural Information Processing Systems: Natural and Synthetic. Vancouver, December 03-08, 2001. Cambridge: MIT Press, 2001. P. 833−840.

42. **Nawrocki D., Viole F.** Behavioral Finance in financial market theory, utility theory, portfolio theory and the necessary statistics: A review // Journal of Behavioral and Experimental Finance. Vol. 2, 2014. P. 10−17.

43. **Pellicciari V., Dahling C.G.** Markov Models: Introduction to Markov Chains, Hidden Markov Models and Bayesian networks (Advanced Data Analytical Book 3). October 13, 2017. 42 p.

44. **Ponn-Nielsen A., Hansen E.** Conditioning and Markov properties. Department of Mathematical Sciences. University of Copenhagen, 2014. 173 p.

45. **Resch B.** Hidden Markov Models. A Tutorial for the Course «Computational Intelligence». Graz University of Technology, 22.04.2018.

46. **Sass J., Schal M.** Financial Modeling. Part VI // Markov Decision Processes in Practice. Editors Richard J. Boucherie, Nico M. van Dijk. International Series in Operations Research & Management Science. Volume 248. Series Editor Camulle C. Price. Springer International Publishing, 2017. P. 523–546 (550).

47. **Shanmugamani R.** Deep Learning for Computer Vision: Expert techniques to train advanced neural networks using TensorFlow and Keras. Mumbai: Pact Publishing, January 23, 2018. 310 p.

48. **Sigova M., Vasiliev S., Klyuchnikov I.** Financial Perspective of Big Data // The 30th International Business Management Conference. Norristown, PA, U.S.A., 2017.

49. **Stamp M.** A Revealing Introduction to Hidden Markov Models. Dep. Of Computer Science San Jose State University, January 12, 2018. 21 p.

50. **Wells C.** The Kalman Filter in Finance. Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics. Vol. 32. Springer, 1996. 132 p.

51. **Zucchini W., MacDonald I.L., Langrock R.** Hidden Markov Models for Time Series. An Introduction Using R. Second Edition. Boca Raton, 2016 (2009). 398 p.

References

1. **Klyuchnikov I.K.** Stsenarii razvitiya denezhno-finansovogo khozyaystva // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 5. Ekonomika. 2013. № 4. S. 110–129.

2. **Klyuchnikov I.K., Klyuchnikov O.I.** Makroekonomika. Kreditnyye i birzhevyye tsikly. Moskva: Yurayt, 2022. 279 s.

3. **Klyuchnikov I.K., Molchanova O. A., Klyuchnikov O.I.** Finansovyye krizisy: teoriya, istoriya i sovremennost'. SPb: SPBGEF. 2011. 258 s.

4. **Klyuchnikov I.K., Molchanova O. A., Klyuchnikov O.I.** Veroyatnost' finansovoy stabil'nosti i bezopasnosti: kontseptsii i modeli // Finansy i Biznes, № 1, 2017. S. 70–81.

5. **Nesterov YU. Ye.** Metody vypukloy optimizatsii. – M.: Izd-vo MTSNMO, 2010. 281 s.

6. **Sigova M. V., Klyuchnikov I.K.** Teoriya finansovykh innovatsiy. Kriticheskiy obzor osnovnykh podkhodov // Vestnik finansovogo universiteta, №6 (96), 2016. S. 85–96.

7. **Solodov A.K.** Osnovy finansovogo risk-menedzhmenta: uchebnik i uchebnoye posobiye. – M.: Izdaniye Aleksandra K. Solodova, 2018. 286 s.

8. **Sokolov Ye. V., Borodin D. I.** Modeli prognozirovaniya tsen aktsiy s primeneniyem funktsiy Uosha i markovskikh tsepey // Prikladnaya informatika, № 5 (28), 2010. S. 3–15.

9. **Stratonovich R. L.** Uslovnyye markovskiye protsessy i ikh primeneniye k teorii optimal'nogo upravleniya. – M.: Izd-vo MGU, 1966. – 319 s.

10. **Shiryayev A. N.** Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki. T. 2. Teoriya. – M.: MTSNMO. 2016.

11. **Cartea A., Jaimungal S., Penalva J.** Algorithmic and High-Frequency Trading (Mathematics, Finance and Risk). Cambridge: Cambridge University Press, October 7, 2015. 356 p.

12. **Ching W-K., Ng M.K.** Markov Chains: Models, Algorithms and Applications. Springer, 2006. 208 p.

13. **Chorafas D.N.** Financial Cycles. Palgrave Macmillan, New York, 2015.

14. **Claessens S., Kose M.A., Terrones M.T.** Financial Cycles: What? How? When? IMF Working Paper 11/76. IMF, April 2011. 40 p.

15. **Coekho J.P., T.M. Pinho, Boaventura-Cunha J.** Hidden Markov Models. CRC Press, 2021. 282 c.

16. **Collins M.** The Inside-Outside Algorithm. 15 p. http://www.cs.columbia.edu/~mcollins/io.pdf. 22.04.2018.

17. **Date P., Ponomareva K.** Linear and nonlinear filtering in mathematical finance: a review // Journal of Management Mathematics. Vol. 27 (4), 2015. P. 1−18.

18. **Davison, M., Mammon R.S., Tenyakov A.** Modeling high-frequency FX rate dynamics: A zero-delay multi-dimensional HMM-based approach // Knowledge-Based Systems, Vol. 101, 1 June 2016. P. 142−155.

19. **Davison M., Mamon R., Tenyakov, A.** Filtering of a discrete-time HMM-driven multivariate Ornstein-Uhlenbeck model with application to forecasting market liquidity regimes // IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, Vol. 10 (6), 2016. P. 994−1005.

20. **Dixon M.F., Halperin I., Bilokon P.** Machine Learning in Finance: From Theory to Practice. 1st ed. Springer, 2020.

21. Due{Code}. Markov Models: Understanding Data Science, Markov Models and Unsupervised Machine Learning in Python. Kindler, May 27, 2017. 81 p.

22. **Elliott R., Aggoun L., Moore J.** Hidden Markov Models: Estimation and Control (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer, December 8, 2008 (1995). 382 p.

23. **Elliott R., Kopp E.** Mathematics of Financial Markets. Springer, October 8, 2004. 354 p.

24. **Elliott R.J., Lau J.W., Miao H.** Viterbi-Based Estimation for Markov Switching GARCH Model // Applied Mathematical Finance. Vol. 19 (3), 2012. P. 219−231.

25. **Elliott, Mammon**, (2007). Hidden Markov Models in Finance. Editors Elliott R., Mammon R.S. April 24, 2007. 186 p.

26. **Elliott, Mammon,** (2014). Hidden Markov Models in Finance: Further Developments and Applications. Vol. II. Eds. Mammon R.S., Elliott R., 2014. 280 p.

27. **Gagniuc P.A.** Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation. USA: John Wiley & Sons, 2017. P. 46−59 (235).

28. **Ghahramani Z.** An Introduction to Hidden Markov Models and Bayesian Networks // International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Vol. 15 (1), 2001. P. 9−42.

29. **Glasserman P.** Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer, 2003. 597 p.

30. Handbook of Markov Decision Processes. Editors Feinberg E.A., Shwartz A. Boston: Kluwer, 2002. 565 p.

31. **Harding D., Pagan A.** Dissecting the Cycle: A Methodological Investigation // Journal of Monetary Economics. Vol. 49, 2002. P. 365−381.

32. **Hassain A.** The Sentient Machine: The Coming Age of Artificial Intelligence. New York: Scribner, November 21, 2017. 224 p.

33. **Hull J.** Options, Futures, and Other Derivatives. Pearson India, 2017.

34. **Juselius M., Tarashev N.** When uncertainty decouples expected and unexpected losses. BIS Working Papers No 995. BIS, January 2022.

35. **Klioutchnikov I.K., Klioutchnikova A.I.** Long-Tail Data Financial Recommender Systems Embedded in Social Media // Proceedings of the 37th International Business Information Management Association (IBIMA), ISBN: 978-0-9998551-6-4, 30-31 May 2021, Cordoba, Spain, p 3850−3861.

36. **Kodres L.E., Pritsker M. A** Rational Expectations Model of Financial Contagion // Journal of Finance. Vol. 57 (2), 2002. P. 769−799.

37. **Liu B. A** Survey on Trust Modeling from a Bayesian Perspective // arXiv:1806.03916v7 [cs.CR] 11 Jan 2020, 2020. P. 1−41.

38. Markov Decision Processes in Practice. Editors Richard J. Boucherie, Nico M. van Dijk. International Series in Operations Research & Management Science. Volume 248. Series Editor Camulle C. Price. Springer International Publishing, 2017. 550 p.

39. Mathematics of Derivative Securities. Editors Michael A. H. Dempster and Stanley R. Pliska. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 600 p.

40. **Movahedi F., Coyle J.L., Sejdic E.** Deep belief networks for electroencephalography: A review of recent contributions and future outlooks // IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics, 14 July 2017. P. 697−710.

41. **Murphy K.P., Paskin M.A.** Linear time inference in hierarchical HMMs / NIPS'01 Proceedings of the 14th International Conference on Neural Information Processing Systems: Natural and Synthetic. Vancouver, December 03-08, 2001. Cambridge: MIT Press, 2001. P. 833−840.

42. **Nawrocki D., Viole F.** Behavioral Finance in financial market theory, utility theory, portfolio theory and the necessary statistics: A review // Journal of Behavioral and Experimental Finance. Vol. 2, 2014. P. 10−17.

43. **Pellicciari V., Dahling C.G.** Markov Models: Introduction to Markov Chains, Hidden Markov Models and Bayesian networks (Advanced Data Analytical Book 3). October 13, 2017. 42 p.

44. **Ponn-Nielsen A., Hansen E.** Conditioning and Markov properties. Department of Mathematical Sciences. University of Copenhagen, 2014. 173 p.

45. **Resch B.** Hidden Markov Models. A Tutorial for the Course "Computational Intelligence". Graz University of Technology, 22.04.2018.

46. **Sass J., Schal M.** Financial Modeling. Part VI // Markov Decision Processes in Practice. Editors Richard J. Boucherie, Nico M. van Dijk. International Series in Operations Research & Management Science. Volume 248. Series Editor Camulle C. Price. Springer International Publishing, 2017. P. 523−546 (550).

47. **Shanmugamani R.** Deep Learning for Computer Vision: Expert techniques to train advanced neural networks using TensorFlow and Keras. Mumbai: Pact Publishing, January 23, 2018. 310 p.

48. **Sigova M., Vasiliev S., Klyuchnikov I.** Financial Perspective of Big Data // The 30th International Business Management Conference. Norristown, PA, U.S.A., 2017.

49. **Stamp M.** A Revealing Introduction to Hidden Markov Models. Dep. Of Computer Science San Jose State University, January 12, 2018. 21 p.

50. **Wells C.** The Kalman Filter in Finance. Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics. Vol. 32. Springer, 1996. 132 p.

51. **Zucchini W., MacDonald I.L., Langrock R.** Hidden Markov Models for Time Series. An Introduction Using R. Second Edition. Boca Raton, 2016 (2009). 398 p.