

УДК:330.4

ПОСТРОЕНИЕ ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ С ПОСТОЯННЫМ СРЕДНИМ МЕТОДОМ МАКСИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРА СКОРОСТИ ВОЗВРАЩЕНИЯ К СРЕДНЕМУ ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА

ПРАВДУХИН М.М.^{1,2}

ШПОЛЯНСКИЙ Ю.А., д. ф-м. н.^{1,2}

¹ИТИВИТИ. Якубовича, 24, Офисный особняк Ново-Исаакиевский, 190000

Санкт-Петербург, Россия

²Университет ИТМО. Кронверкский пр, 49, 197101

Санкт-Петербург, Россия

Т.: +79818209893. E-mail: mikhail.pravdukhin@itiviti.com

Аннотация

Предложен метод построения портфеля акций с постоянным средним, основанный на оценке вектора стационарной линейной комбинации нестационарных случайных процессов путем максимизации параметра скорости возвращения к среднему процесса Орнштейна – Уленбека. По сравнению с ранее известными подходами исключена трудоемкая процедура определения порядка векторной авторегрессии, что позволило упростить и сделать более надежным алгоритм построения стационарного портфеля. На основе предложенного метода разработана торговая стратегия статистического арбитража, которая была протестирована на данных о ценах отраслевых ETF за период 2009–2019 гг. Продемонстрирована работоспособность стратегии, достигнутые характеристики эффективности: CAGR 5.05%, Sharpe Ratio 1.32 и CAGR 2.93%, Sharpe Ratio 9.15. Доходность стратегии обеспечивается независимо от состояния рынка, в качестве индикатора которого был рассмотрен индекс S&P500.

Ключевые слова

Торговая стратегия, статистический арбитраж, портфель с постоянным средним, процесс Орнштейна – Уленбека, скорость возвращения к среднему.

UDC: 330.4

BUILDING A MEAN-REVERTING PORTFOLIO BY MAXIMIZATION OF SPEED OF MEAN-REVERSION OF ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS

PRAVDUKHIN Mikhail^{1,2}

SHPOLYANSKIY Yuri, Doctor of Sciences (Physics&Mathematics)^{1,2}

¹ИТИВИТИ. Yakubovicha, 24, New St. Isaac Office Centre, 190000

St. Petersburg, Russia

²ITMO University. Kronverksky 49, 197101

St Petersburg, Russia

T.: +79818209893. E-mail: mikhail.pravdukhin@itiviti.com

Abstract

A method of building a mean-reverting portfolio is proposed, based on estimating the vector of a stationary linear combination of non-stationary random processes by maximizing the speed of mean-reverting parameter of the Ornstein – Uhlenbeck process. Compared with previously known approaches, the laborious procedure for determining the order of vector autoregression is excluded, which simplified and made more reliable the algorithm for constructing a stationary portfolio. Based on the proposed method, a trading strategy for statistical arbitrage was developed, which was tested on data of industry ETF prices for the period 2009–2019. The efficiency of the strategy and the achieved performance characteristics were demonstrated: CAGR 5.05%, Sharpe Ratio 1.32 and CAGR 2.93%, Sharpe Ratio 9.15. The profitability of the strategy is ensured regardless of the state of the market, an indicator of which the S&P500 index was considered.

Keywords

Trading strategy, statistical arbitrage, mean-reverting portfolio, Ornstein – Uhlenbeck process, speed of mean-reversion

Введение

На сегодняшний день теоретико-вероятностный подход к оптимальному выбору портфеля является общепризнанным в научном сообществе и используется повсеместно. Настоящая работа посвящена методу формирования портфеля, оптимального в смысле постоянства среднего значения его стоимости (от *англ.* meanreversion).

В рамках концепции «meanrevertingportfolio» предлагается способ обнаружения аномально низких или высоких значений стоимости портфеля посредством сравнения текущего значения со средним. За счет свойства эргодичности среднего ожидается, что стоимость портфеля со временем возвращается к своему математическому ожиданию. Это открывает широкие возможности для получения дохода в тех случаях, когда стоимость портфеля отклоняется от своего среднего достаточно сильно.

Несмотря на идейную простоту, выбор портфеля с постоянным средним является нетривиальной статистической задачей. С теоретико-вероятностной точки зрения постоянство среднего некоторого случайного процесса является частным случаем условия стационарности данного процесса. На сегодняшний день существует множество подходов к формированию стационарного портфеля. В классической статье [1] используется линейная регресс-

ия цен акций на главные компоненты, что фактически является применением метода Энгла – Грейнджера [2]. В известном учебнике Эрнеста Чана [3] приводится пример использования подхода Йохансена к коинтеграции [4]. В статьях [5; 6] авторы предполагают, что многомерный временной ряд цен инструментов подчиняется процессу векторной авторегрессии (VAR) и моделируют стоимость портфеля при помощи процесса Орнштейна – Уленбека. Они сводят задачу о поиске коинтеграционного соотношения к решению обобщенной проблемы собственных векторов.

В настоящей работе мы предлагаем метод оценки стационарной линейной комбинации, основанный на максимизации параметра скорости возвращения к среднему процесса Орнштейна – Уленбека. По сути, ту же цель преследовали авторы работ [5; 6], однако вместо прямой постановки задачи они решали альтернативную проблему, в которой максимизация скорости возвращения к среднему была косвенным результатом, прямо недоказуемым. Так же, как и в [5; 6], после математических преобразований мы приходим к обобщенной задаче на собственные числа и вектора. Но наша процедура не требует введения векторной авторегрессии, что в свою очередь избавляет от необходимости определения ее порядка. Это упрощает математические выкладки и численный анализ и обеспечивает высокую точность. Кроме этого, мы полагаем, что решение прямой задачи обеспечивает лучшую интерпретируемость получаемых результатов.

Структура настоящей работы представлена введением, 4 разделами и заключением. В разделе 2 описаны общие принципы торговой стратегии статистического арбитража, а также приведена его теоретико-вероятностная формализация. Раздел 3 посвящен рассмотрению свойств процесса Орнштейна – Уленбека как важнейшего инструмента моделирования стационарного портфеля. Отдельное внимание уделено параметру скорости возвращения к среднему как фундаменту, на котором строится основная модель, описанная в данной работе. В разделе 4 полностью детализирована модель оценки стационарной линейной комбинации, основанная на максимизации скорости возвращения к среднему. В разделе 5 представлены результаты моделирования торговой стратегии, построенной на основе предлагаемой модели. Моделирование было произведено при помощи исторических данных о ценах 14 акций Нью-Йоркской биржи в период с 01.01.2009 по 01.01.2019.

Статистический арбитраж

В финансах статистическим арбитражем принято считать широкий класс торговых стратегий, объединенных общей концепцией, называемой

«возвращение к среднему» (от *англ.* «mean reversion»). Суть концепции заключается в анализе инструментов, статистические данные о которых можно интерпретировать как случайный процесс с постоянным безусловным средним. Таким образом, становится ясна фундаментальная суть данной стратегии: сильное отклонение цены инструмента от теоретического среднего можно интерпретировать как возможность для открытия позиции по данному инструменту с последующим закрытием в момент возвращения цены к среднему. Отсюда и название стратегии: в то время как сам по себе арбитраж представляет из себя извлечение прибыли за счет *одновременной* покупки и продажи инструмента по различным ценам (имеется в виду, например, заключение сделок на различных биржах), статистический арбитраж являет из себя получение прибыли на основе *статистически значимой разницы в цене инструмента во времени*.

С точки зрения теории вероятностей постоянность безусловного среднего цены финансового инструмента вне зависимости от момента времени формализуется свойством стационарности [7] стохастического процесса, описывающего данный инструмент. Кроме того, стационарность цены обеспечивает постоянную безусловную дисперсию, что также является важным фактором для реализации упомянутой стратегии, так как гарантирует возможность сопоставления отклонения цены от теоретического среднего с этой величиной.

Торговые правила статистического арбитража

Пусть случайный процесс S_t , описывающий стоимость актива, стационарен «в широком смысле» и $E(S_t) = \bar{S} = const$, где $t \geq 0$ – время, тогда

1. Если $S_t \geq \bar{S} + \varepsilon_{open_short}$, открываем короткую позицию по текущей цене S_t .
2. Если $S_t \leq \bar{S} - \varepsilon_{open_long}$, открываем длинную позицию по текущей цене S_t .
3. Если открыта короткая позиция и $S_t \leq \bar{S} + \varepsilon_{close_short}$, закрываем эту позицию по текущей цене S_t .
4. Если открыта длинная позиция и $S_t \geq \bar{S} - \varepsilon_{close_long}$, закрываем эту позицию по текущей цене S_t .

Величины $\varepsilon_{open_short}, \varepsilon_{open_long}, \varepsilon_{close_short}, \varepsilon_{close_long} \geq 0$ задают пороги открытия и закрытия сделок.

На Рис. 1 представлена визуализация торговли финансовым инструментом согласно стратегии статистического арбитража. Значимым торговым

сигналом считается отклонение от среднего не менее чем в два стандартных отклонения $std = \sqrt{D(S_t)}$. Как можно видеть, цена инструмента пересекает пороги открытия/закрытия позиции, поэтому стратегия статистического арбитража может быть применена.

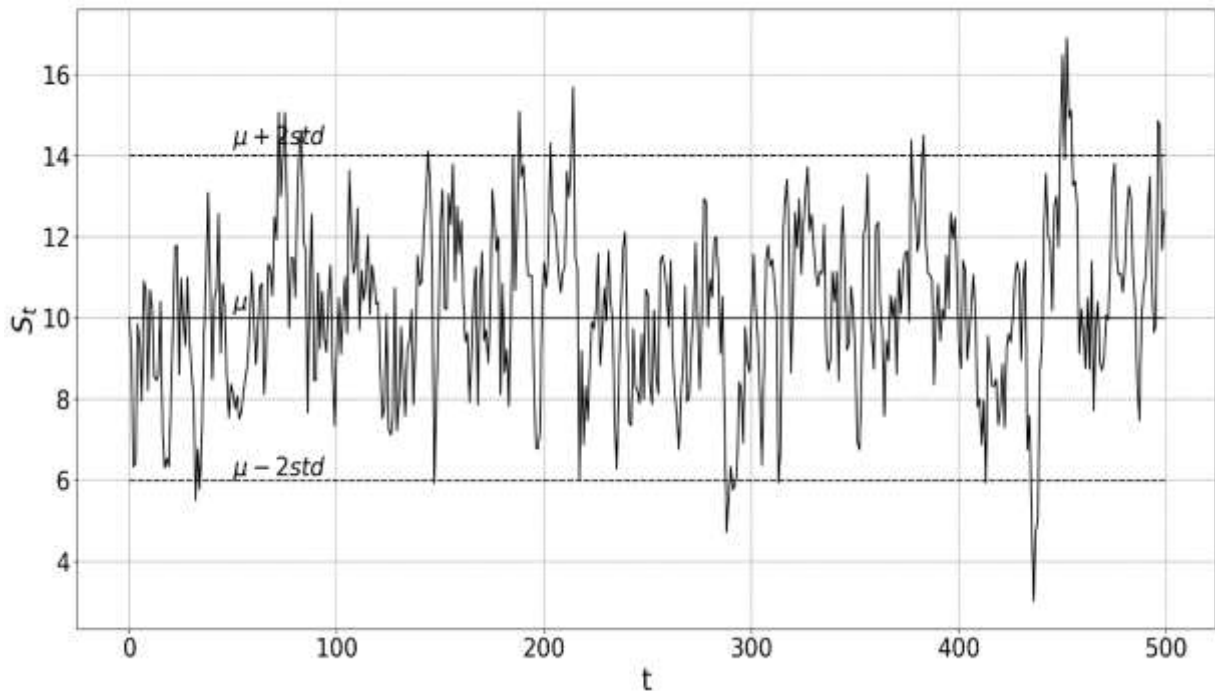


Рисунок 1. Визуализация стратегии статистического арбитража (Стоимость актива S и время t приведены в условных единицах)

Тем не менее практическое применение статистического арбитража сопряжено с некоторыми сложностями. Реальные данные показывают, что ряды цен финансовых активов представляют из себя нестационарные случайные процессы. Это означает, что чаще всего статистический арбитраж неприменим к одиночным финансовым инструментам. В настоящее время статистический арбитраж в основном ассоциируется с методами комбинирования активов в стационарный портфель (так называемый «meanreverting portfolio»). Основным теоретическим результатом настоящей статьи является новый подход к составлению портфеля с постоянным средним, основанный на максимизации параметра скорости возвращения к среднему процесса Орнштейна – Уленбека.

Процесс Орнштейна – Уленбека

В предыдущем разделе было отмечено, что главной характеристикой портфеля, на котором может быть реализована стратегия статистического

арбитража, является стационарность. Вне зависимости от методов комбинирования активов в данный портфель, его стоимость принято моделировать в виде процесса Орнштейна – Уленбека [1; 5; 6]

Этот процесс описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением [**Ошибка! Неизвестный аргумент ключа.**]:

$$t \geq 0, S_t \in \mathbb{R}, \theta > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \quad (3.1)$$

где W_t – стандартный виннеровский процесс; μ, σ, θ – параметры, определяющие среднее, волатильность и скорость возвращения к среднему, соответственно.

Скорость возвращения к среднему важна в рассматриваемом подходе. Дело в том, что в ходе торговли значим не только сам факт существенного отклонения цены портфеля от среднего, но и то, насколько быстро цена вернется к нему. Чем быстрее стоимость портфеля компенсирует образовавшееся отклонение, тем скорее может быть закрыта сделка, следовательно, тем больше прибыли можно извлечь за единицу времени.

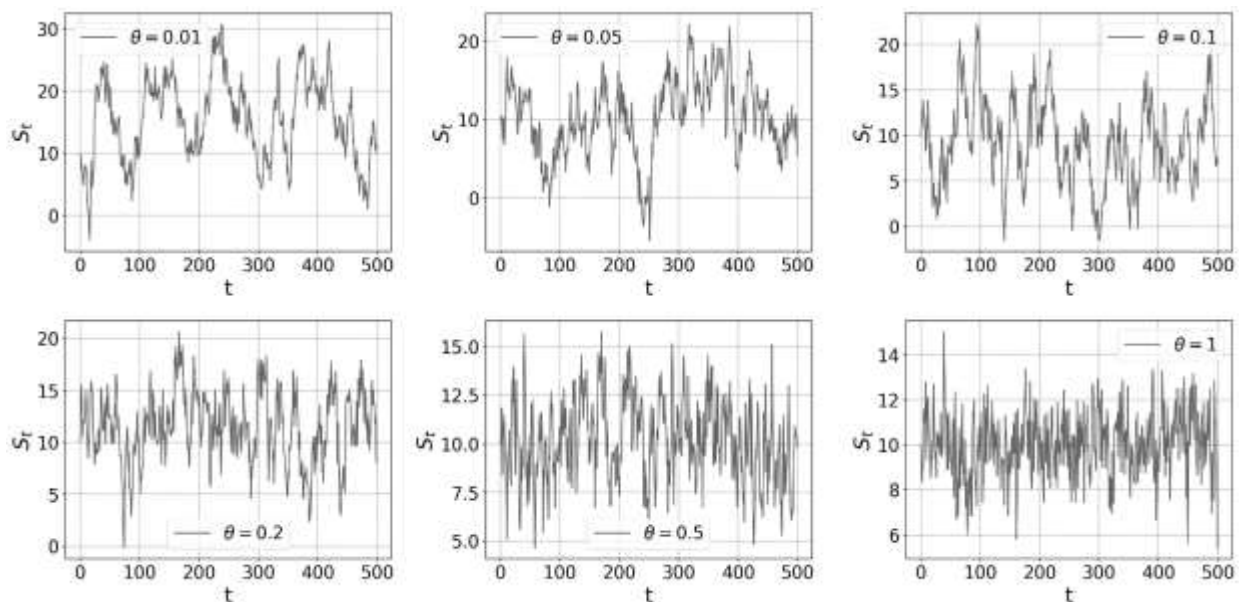


Рисунок 2. Визуализация скорости возвращения к среднему (стоимость актива S и время t приведены в условных единицах)

На Рис. 2 можно проследить, как увеличение значения параметра θ изменяет динамику процесса, добавляя число колебаний вокруг среднего (все варианты процесса S_t сгенерированы на языке Python 3 с применением библиотек NumPy и Matplotlib).

Решение уравнения (3.1) выглядит следующим образом [8]:

$$S_t = S_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s, \quad (3.2)$$

где $S_0 \in \mathbf{R}$ – начальное значение процесса, интеграл понимается в смысле интеграла Ито. На основе выражения (3.2) могут быть получены числовые характеристики процесса [8]:

$$\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}); \quad (3.3)$$

$$\text{cov}(S_t, S_{t+k}) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta k} - e^{-\theta(2t+k)}). \quad (3.4)$$

Из формул (3.3), (3.4) видно, что процесс S_t асимптотически стационарен

$$S_t \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right), t \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Дискретизация процесса Орнштейна – Уленбека выглядит следующим образом:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{-\theta \Delta t} + \mu(1 - e^{-\theta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\theta \Delta t}}{2\theta}} \xi_t, \quad (3.6)$$

где $\Delta t > 0$ – приращение времени, $\xi_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ – независимые случайные величины.

При помощи дискретизации (3.6) может быть получена интерпретация процесса Орнштейна – Уленбека в виде непрерывной версии процесса авторегрессии 1-го порядка:

$$X_{t+1} = a + bX_t + u_t; \quad (3.7)$$

$$u_t = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\theta \Delta t}}{2\theta}} \xi_t; \quad (3.8)$$

$$a = \mu(1 - e^{-\theta \Delta t}); \quad (3.9)$$

$$b = e^{-\theta \Delta t}; \quad (3.10)$$

$$X_{t+1} = S_{t+\Delta t}; \quad (3.11)$$

Данная интерпретация удобна, в частности, для оценки параметров процесса по статистическим данным (хорошо известны формулы МНК-оценок коэффициентов авторегрессии первого порядка, например [5], МНК – принятая аббревиатура для метода наименьших квадратов). Из формулы (3.10) легко видеть, что обратный переход от уравнения авторегрессии к процессу Орнштейна – Уленбека возможен в случае, если $0 < b \leq 1$. В общем же хорошо известен факт, что процесс (3.7) стационарен, когда $|b| \leq 1$ [2].

Отдельного рассмотрения заслуживает величина «полупериод возвращения к среднему» (от *англ.* «half-life of mean reversion») $T_{\frac{1}{2}}$, которая обозначает среднее время, необходимое процессу S_t для того, чтобы скорректировать половину начального отклонения от своего математического ожидания [3]:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\theta}. \quad (3.12)$$

Модель θ -max

В многочисленных работах, посвященных данной тематике, при исследовании способов составления стационарного портфеля отмечается критическая важность обеспечения высокой скорости возвращения к среднему. В предыдущем разделе уже было сказано, что значение этого показателя может напрямую влиять на прибыльность стратегии. Так, например, в работе [5] стационарность процесса связывается со схожестью процесса с шумом, и считается, что процесс тем быстрее возвращается к своему среднему, чем сильнее он напоминает шум. В настоящей работе мы прямо ставим задачу максимизации параметра θ портфеля, что определяет ее оригинальность.

Формализуем задачу: пусть имеется некоторый многомерный временной ряд цен активов, входящих в портфель:

$$\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^k)^T \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.1)$$

Цену портфеля y_t будем определять как линейную комбинацию компонент ряда \mathbf{x}_t с коэффициентами β :

$$y_t = \beta^T \mathbf{x}_t, \beta \in \mathbb{R}^k. \quad (4.2)$$

Цена портфеля моделируется при помощи дискретного процесса Орнштейна – Уленбека (3.6). Оценки параметров процесса функционально зависят от вектора β :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \hat{\theta}(\beta) : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbb{R}; \\ \hat{\mu} &= \hat{\mu}(\beta) : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbb{R}; \\ \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}(\beta) : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbb{R};\end{aligned}\tag{4.3}$$

Найдем такое значение β , что достигается максимум $\hat{\theta}$:

$$\tilde{\beta} = \underset{\mathbf{R}^k}{\operatorname{argmax}} [\hat{\theta}(\cdot)\beta].\tag{4.4}$$

Используя преобразования (3.7)–(3.11) можно перейти к задаче минимизации параметра процесса авторегрессии:

$$\tilde{\beta} = \underset{\mathbf{R}^k}{\operatorname{argmin}} [\hat{b}(\cdot)\beta].\tag{4.5}$$

Пусть $N + 1$ – размер имеющейся выборки, $X = (x_t^j)_{t=0,j=1}^{N \times k} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times k}$ – матрица данных, содержащая значения временного ряда \mathbf{x}_t , $Y = (y_t)_{t=0}^N = X\beta \in \mathbf{R}^N$ – вектор, содержащий значения ряда y_t при каком-то значении β . Пусть также $X_{1:N} = (x_t^j)_{t=1,j=1}^{N \times k}$, $X_{0:N-1} = (x_t^j)_{t=0,j=1}^{(N-1) \times k}$ – подматрицы X , выступающие в роли значений процесса \mathbf{x}_t , его лага \mathbf{x}_{t-1} , соответственно. Аналогично для $Y_{0:N-1} = (y_t)_{t=0}^{N-1}$, $Y_{1:N} = (y_t)_{t=1}^N$. Очевидно, что $Y_{0:N-1} = X_{0:N-1}\beta$ и $Y_{1:N} = X_{1:N}\beta$. Тогда можно выразить зависимость МНК-оценки \tilde{b} от β [5]:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(\beta) &= \frac{\sum_{t=1}^N y_t y_{t-1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i y_{j-1}}{\sum_{t=1}^N y_{t-1} y_{t-1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_{i-1} y_{j-1}} = \\ &= \frac{Y_{0:N-1}^T Y_{1:N} - \frac{1}{N} Y_{0:N-1}^T \mathbb{I}_N \mathbb{I}_N^T Y_{1:N}}{Y_{0:N-1}^T Y_{0:N-1} - \frac{1}{N} Y_{0:N-1}^T \mathbb{I}_N \mathbb{I}_N^T Y_{0:N-1}} =\end{aligned}\tag{4.6}$$

где \mathbb{I}_N – единичный вектор размерности n .

Заменим для удобства

$$A = X_{0:N-1}^T X_{1:N} - \frac{1}{N} X_{0:N-1}^T \mathbb{I}_N \mathbb{I}_N^T X_{1:N};$$

$$B = X_{0:N-1}^T X_{0:N-1} - \frac{1}{N} X_{0:N-1}^T \mathbb{1}_N \mathbb{1}_N^T X_{0:N-1}. \quad (4.7)$$

Матрица B симметрична, а матрицу A можно свободно трансформировать в симметричную, так как числитель (4.6) есть квадратичная форма: $A' = \frac{1}{2}(A^T + A)$. Тогда получаем

$$\tilde{b}(\beta) = \frac{\beta^T A \beta}{\beta^T B \beta} = \frac{\beta^T A' \beta}{\beta^T B \beta} \rightarrow \min \quad (4.8)$$

Задача (4.8) есть хорошо изученная проблема поиска минимального собственного числа и соответствующего ему собственного вектора в обобщенной проблеме собственных чисел [9]:

$$A' \beta = \tilde{b} B \beta, \quad (4.9)$$

что сводится к поиску корней полинома

$$\det(A' - \tilde{b} B) = 0. \quad (4.10)$$

Использование вместо матрицы A ее симметричного аналога A' обусловлено большим удобством в решении задач (4.9), (4.10). В том случае, если обе матрицы в выражении (4.9) симметричны, собственные вектора и собственные числа гарантированно будут вещественнозначные. Данный факт используется в модифицированных численных алгоритмах поиска решений этой задачи.

Как было отмечено в разделе 0, уравнение авторегрессии асимптотически стационарно в том случае, если его параметр $|b| < 1$. Поэтому в качестве решений (4.9), (4.10) удовлетворяет не только собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу, но также и все остальные собственные вектора β с собственными числами по модулю меньшими единицы. Если же условие $|b| < 1$ оказывается невыполнимым, то задача поиска стационарной линейной комбинации инструментов портфеля не имеет решения. Это можно трактовать как неудачный выбор инструментов.

Моделирование торговой стратегии

В данном разделе описан алгоритм торговой стратегии статистического арбитража, основанный на методе θ -max, а также представлены результаты

компьютерного моделирования исполнения стратегии на исторических данных. Моделирование работы стратегии, матричные вычисления, а также визуализация полученных результатов проведены средствами языка Python 3 (библиотеки NumPy и Matplotlib). Параметры стратегии представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры стратегии статистического арбитража

Параметр	Обозначение	Комментарий
Размер обучающей выборки	N	-
Порог открытия длинной позиции	$\sigma_{longopen}$	Измеряются в стандартных отклонениях от теоретического среднего. Достижение этих уровней определяет моменты открытия и закрытия длинной и короткой позиции соответственно
Порог закрытия длинной позиции	$\sigma_{longclose}$	
Порог открытия короткой позиции	$\sigma_{shortopen}$	
Порог закрытия короткой позиции	$\sigma_{shortclose}$	
Максимальный период удержания позиции	H	Сделка должна быть закрыта по достижении соответствующего порога, либо по истечении данного периода
Период переоценки параметров	R	Интервал времени, при превышении которого параметры должны быть переоценены на последних N наблюдениях. В случае, если имеется открытая позиция по портфелю, переоценка параметров не производится до ее закрытия

С учетом введенных параметров можно сформулировать алгоритм стратегии. Пусть X – двумерный массив, в столбцах которого хранятся цены акций, X_t-t -я строка массива, соответствующая моменту времени t ; pos – переменная-индикатор позиции портфеля, ее возможные значения 0, 1, -1 соответствуют состояниям отсутствия позиции, длинной позиции, короткой позиции; r – количество дней с момента последней переоценки параметров; h – количество дней удержания позиции; β – текущий вектор портфеля; θ, μ, σ – текущие параметры процесса Орнштейна – Уленбека; $\frac{T_1}{2}$ – текущее значение half-life of mean reversion, тогда

0. Устанавливаем $r = R$, $h = 0$, $pos = 0$, $t = 1$.

1. ЕСЛИ $pos = 0$:

1.1. $r = r + 1$

1.2. ЕСЛИ $r \geq R$:

1.2.1. Оцениваем $\beta, \theta, \mu, \sigma, \frac{T_1}{2}$.

1.2.2. ЕСЛИ портфель не стационарен ИЛИ $T_{\frac{1}{2}} > H$:

1.2.2.1. Переходим к пункту 3:

1.2.3. ИНАЧЕ:

1.2.3.1. $r = \mathbf{0}$

$$1.3. z_t = \frac{\mathbb{K}(\beta)^T X_t - \mu}{\sigma}$$

1.4. ЕСЛИ $z_t \leq \sigma_{longopen}$:

1.4.1. Открываем длинную позицию:

1.4.2. $pos = 1$

1.5. ИНАЧЕ ЕСЛИ $z_t \geq \sigma_{shortopen}$:

1.5.1. Открываем короткую позицию:

1.5.2. $pos = -1$

2. ИНАЧЕ ЕСЛИ $pos \neq \mathbf{0}$:

2.1. $h = h + 1$

2.2. ЕСЛИ $h \geq H$:

2.2.1. Закрываем позицию:

2.2.2. $pos = \mathbf{0}$

2.2.3. $r = r + h$

2.2.4. $h = \mathbf{0}$

2.3. ИНАЧЕ:

$$2.3.1. z_t = \frac{\mathbb{K}(\beta)^T X_t - \mu}{\sigma}$$

2.4. ЕСЛИ ($pos = 1$ И $z_t \geq \sigma_{longclose}$)

ИЛИ ($pos = -1$ И $z_t \geq \sigma_{shortclose}$):

2.4.1. Закрываем позицию:

2.4.2. $pos = \mathbf{0}$

2.4.3. $r = r + h$

2.4.4. $h = \mathbf{0}$

3. $t = t + 1$

4. Переходим к пункту 1.

Оценка вектора β осуществляется на предшествующих tN элементах массива X методом максимизации скорости возвращения к среднему, описанном в разделе 0. Параметры процесса Орнштейна – Уленбека θ, μ, σ , и $T_{\frac{1}{2}}$ оцениваются на соответствующих N наблюдениях полученного портфеля.

В пункте 1.2.2 алгоритма мы исключаем портфели со слишком низким параметром θ : любой портфель, $T_{\frac{1}{2}}$ которого превышает максимальный срок

удержания позиции H , не рассматривается в качестве возможности для открытия позиции.

Фундаментальная взаимозависимость временных рядов является важным условием сохранения стационарности портфеля на прогнозном периоде, данные которого не использовались для оценки вектора β . В качестве инструментов, обладающих сильной связью, в данном примере будут рассмотрены акции 14 биржевых инвестиционных фондов (*англ.* Exchange Traded Fund, сокр.ETF), распределенных по 4 отраслям. Именно принадлежность акций к одной отрасли является причиной устойчивого соотношения между ценами инструментов. Также известно, что цены ETF значительно меньше подвержены влиянию корпоративных действий, а значит, в меньшей степени претерпевают рыночные шоки, что принципиально для статистического арбитража.

Таблица 2. Разбиение инструментов по портфелям

	Недвижимость	Драгоценные металлы	Товары	Региональные ETF
Инструменты	IYR, VNQ, SCHH, RWR, ICF	IAU, GLD, SLV	DJP, DBC, GSG	EWC, EWA, IYE

Несмотря на то что торговля портфелями ведется параллельно и независимо, наложим условие общего капитала для всех портфелей. При поступлении сигналов на открытие позиции по нескольким портфелям одновременно доступный капитал разделяется на равные части по числу сигналов. Это позволяет избежать простоя денежных средств в случае, когда какой-то из портфелей долго не получает сигнал на открытие.

В качестве рассматриваемого периода выбран интервал длиной в 10 лет: 2009.01.01 – 2019.01.01. Источником данных послужил ресурс Yahoofinance. Необходимо отметить, что до накопления первых N наблюдений не будет заключено ни одной сделки, так как они отведены для первичной оценки параметров процесса Орнштейна – Уленбека и вектора β . Наборы значений параметров, выбранные для тестирования, даны в Таблице 3.

Таблица 3. Наборы параметров, выбранные для исторического тестирования

	N	$\sigma_{long_{open}}$	$\sigma_{long_{close}}$	$\sigma_{short_{open}}$	$\sigma_{short_{close}}$	H	R
Набор 1	250	-1	-0.25	1	0.25	2	5
Набор 2	250	-1	-0.25	1	0.25	10	5

Наборы различаются только значениями H . Предполагается, что увеличение данного параметра ведет к повышению уровня допустимого риска стратегии: чем дольше возможный период удержания позиции, тем выше вероятность того, что сигнал на закрытие так и не придет и сделка будет закрыта в убыток, в то время как короткий максимальный период ожидания приводит к тому, что сделки закрываются почти сразу же после открытия с небольшой доходностью. Соответствующие результаты моделирования приведены в Таблице 4 и на Рис. 3.

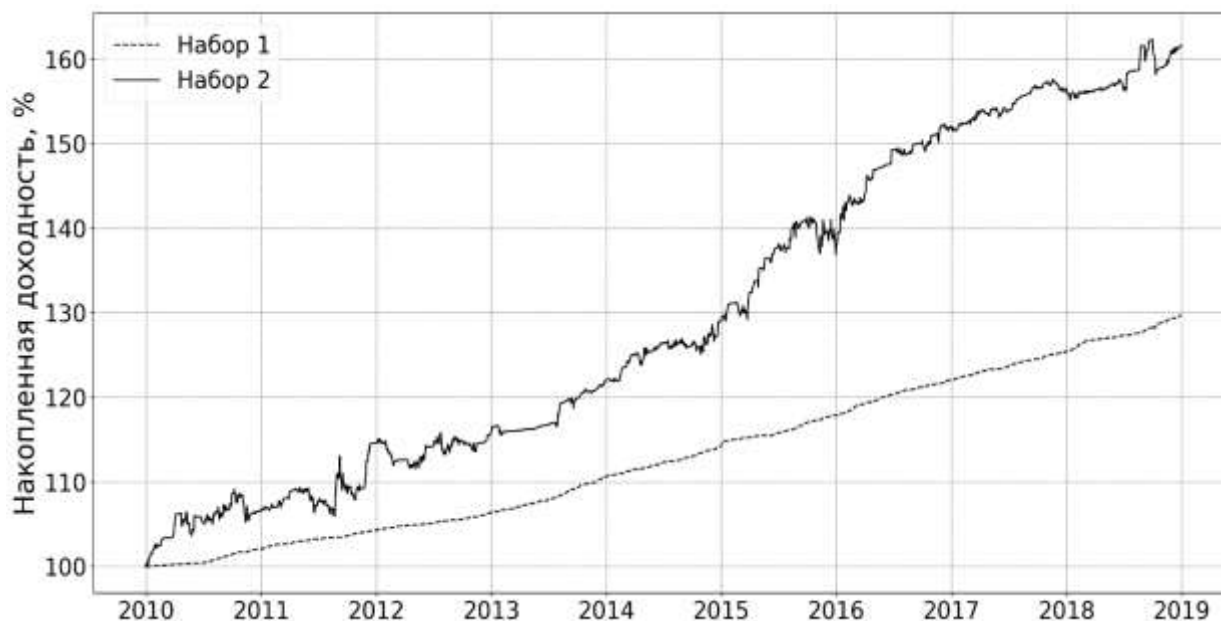


Рисунок 3. Результаты моделирования на наборах 1, 2

Таблица 4. Показатели качества работы стратегий

Показатель	Набор 1	Набор 2
Коэффициент Шарпа	9.1536	1.4709
Средняя дневная доходность	0.0204%	0.0293%
Волатильность дневной доходности	0.0353%	0.3162%
Итоговая доходность	29.6598%	61.6535%
Среднегодовая доходность	2.9281%	5.4815%
Количество сделок	6556	6072
Корреляция дневной доходности с S&P500	-0.02433	0.0964

Из приведенных результатов видно, что подавляющее большинство сигналов на открытие оказалось значимым, о чем свидетельствует явный положительный тренд накопленной доходности стратегий. Однако в глаза бросается

значительно более сильный характер случайности второй кривой, об этом же говорит значение коэффициента Шарпа. Данный вывод полностью соответствует предположению о возможном контроле уровня допустимого риска при помощи параметра H .

Особым свойством стратегии статистического арбитража является нейтральность по отношению к рынку, что наглядно подтверждается проведенными тестами. Для обоих наборов параметров корреляция доходности стратегии с доходностью индекса S&P500 практически равна нулю. Это качество торговой стратегии обладает критической важностью, так как гарантирует стабильность ее результата вне зависимости от рыночной ситуации.

Напоследок заметим, что данная реализация статистического арбитража не приносит сверхбольшой доходности, однако низкий уровень риска и минимальная корреляция с рынком определяют ее применимость на практике.

Заключение

По итогу настоящей статьи можно выделить два важных результата – теоретический и практический. Во-первых, была сформулирована и решена ранее не исследованная задача о построении стационарной линейной комбинации нестационарных случайных процессов путем максимизации параметра скорости возвращения процесса Орнштейна – Уленбека, при помощи которого описывается вся комбинация в целом. Данная задача сводится к поиску минимального собственного числа в обобщенной проблеме собственных значений. В качестве матриц в задаче о собственных векторах выступают ковариационная матрица многомерного ряда цен финансовых инструментов, входящих в портфель, и матрица ковариаций данного ряда со своим лагом. Разработанная модель была положена в основу способа построения портфеля акций с постоянным средним: линейная комбинация акций в такой постановке есть не что иное, как количества, с которыми каждая отдельная ценная бумага входит в портфель.

Во-вторых, была описана и протестирована стратегия статистического арбитража, фундаментом которой является построенная ранее модель θ -max. Торговый алгоритм был протестирован на данных о ценах отраслевых ETF за период 2009–2019 гг. Моделирование было проведено с двумя наборами параметров, отличающихся уровнем допустимого риска. Результаты тестирования показали работоспособность стратегии: CAGR 5.05%, Sharpe Ratio 1.32 и CAGR 2.93%, Sharpe Ratio 9.15. Отдельным преимуществом алгоритма является нейтральность к рыночной ситуации – дневная доходность стратегии имеет практически нулевую корреляцию с индексом S&P500.

Список источников

1. **Avellaneda, M., Lee, J. H.** Statistical arbitrage in the US equities market // *Quantitative Finance*. 2008. № 10(7).P. 761–782.
2. **Engle, Robert F., Granger, Clive W. J.** Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing // *Econometrica*. 1987. № 55 (2). P. 251–276.
3. **Chan, Ernest P.** Algorithmic trading: winning strategies and their rationale. 1966.
4. **Johansen, Søren** Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models // *Econometrica*. 1991. № 59 (6). P. 1551–1580.
5. **D'Aspremont, A.** Identifying Small Mean Reverting Portfolios // *Quantitative Finance*. 2011. № 11(3). P. 351–364.
6. **Fogarasi, M., Levendovszky, J.** Sparse, mean reverting portfolio selection using simulated annealing // *Algorithmic Finance*. 2013. № 2:3–4. P. 197–211.
7. **Hardle W.** *Applied Quantitative Finance* 2002.
8. **Uhlenbeck, G. E., Ornstein, L. S.** On the theory of Brownian Motion // *Phys. Rev.* № 36. P. 823–841.
9. **Б. Парлетт.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – 1983.

References

1. **Avellaneda, M., Lee, J. H.** Statistical arbitrage in the US equities market // *Quantitative Finance*. 2008. № 10(7).P. 761–782.
2. **Engle, Robert F., Granger, Clive W. J.** Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing // *Econometrica*. 1987. № 55 (2). P. 251–276.
3. **Chan, Ernest P.** Algorithmic trading: winning strategies and their rationale. 1966.
4. **Johansen, Søren** Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models // *Econometrica*. 1991. № 59 (6). P. 1551–1580.
5. **D'Aspremont, A.** Identifying Small Mean Reverting Portfolios // *Quantitative Finance*. 2011. № 11(3). P. 351–364.
6. **Fogarasi, M., Levendovszky, J.** Sparse, mean reverting portfolio selection using simulated annealing // *Algorithmic Finance*. 2013. № 2:3-4. P. 197–211.
7. **Hardle W.** *Applied Quantitative Finance* 2002.
8. **Uhlenbeck, G. E., Ornstein, L. S.** On the theory of Brownian Motion // *Phys. Rev.* № 36. P. 823–841.
9. **B. Parlett.** Simmetrichnayaproblemasobstvennihznacheniy. Chislenniemetodi. – 1983.