Крайчик Георгий Ильич
george.kraychik@gmail.com
Россия, Санкт-Петербург
Международный банковский институт
191023, Невский пр., 60
Магистрант

Верлен Мишель
verlaine@capm-consulting.com
ICN Business School
France, Metz – Nancy
Профессор

УДК 336.01

ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИНВЕСТИЦИОННОМ МЕНЕДЖМЕНТЕ

Аннотация

В работе анализируется и обсуждается подход стандартной портфельной теории в свете последних разработок теории принятия решений и поведенческой экономики. Поднимаются проблемы применимости кумулятивной теории перспектив Канемана-Тверски к выбору инвестиционного портфеля в условиях иррациональности инвесторов. Предлагается подход, основанный на методе надежного принятия решений, который мог бы объяснить S-образность функции искажения вероятности. В заключение рассматриваются различные потенциальные исследовательские вопросы, связанные с применимостью подходов теории принятия решений к выбору инвестиционных портфелей.

Ключевые слова

Теория принятия решений, современная портфельная теория, теория перспектив, надежное принятие решений, поведенческая портфельная теория.

George I. Kraychik
george.kraychik@gmail.com
Russia, St. Petersburg
International banking Institute
191023, Nevsky pr., 60
Undergraduate

Verlaine Michel
verlaine@capm-consulting.com
ICN Business School
France, Metz – Nancy
Professor

AN OVERVIEW OF MODERN DECISION-THEORETIC APPROACHES IN INVESTMENT MANAGEMENT

Abstract

We analyze and discuss the standard portfolio approach in light of recent development in decision theory and behavioral economics. We point out problems when applying Kahneman-Tversky cumulative prospect theory to portfolio choice namely irrationality of investors. We suggest a framework based on robust decision making that might explain S-shaped probability weighting. We conclude by suggesting different future research questions to apply empirically relevant decision-theoretic approaches to portfolio choice.

Keywords

Decision theory, modern portfolio theory, prospective theory, robust decision making, behavioral portfolio theory.

В инвестиционном менеджменте подвергаются анализу три фундаментальные сущности: доходность, которую инвестор ожидает получить от вложений; риск, который принимается инвестором в результате вложения денежных средств; время, в течение которого предполагается осуществление возврата денежных средств и получение инвестиционной прибыли. Для каждой из сущностей необходимо ввести метрики, позволяющие проводить их количественный анализ.

Самая простая сущность – время. Выбор временного горизонта осуществляется инвестором до момента выбора инвестиционного портфеля в рамках определения инвестиционных целей. Временной горизонт характеризует тот период времени, в течение которого инвестор вкладывает денежные средства в инструменты финансового рынка. По истечении данного промежутка времени инвестор закрывает все имеющиеся у него позиции, тем самым фиксируя прибыль/убыток.

Вкладывая деньги в финансовый инструмент, инвестор ожидает получения определенной доходности. Данная величина не является строго определенной: фактическая доходность вложений зависит от множества факторов, большинство из которых трудно предугадать. Реализация той или иной доходности носит случайный характер, в связи с чем понятие «доходность» воспринимается инвестором как случайная величина. При анализе инвестиционного вложения инвестор оценивает распределение доходности финансового инструмента, в который он собирается вкладывать денежные средства. В качестве метрики, характеризующей доходность, в большинстве случаев используется математическое ожидание ее распределения.

Наиболее неоднозначной и трудно описываемой сущностью является риск. Под риском понимается возможность получения инвестором негативного результата от инвестиционных вложений. Вкладывая деньги в финансовый инструмент, инвестор принимает на себя риск потери части денежных средств в результате неблагоприятных обстоятельств на фондовом рынке. Чаще всего в качестве метрики риска выступает некоторая функция, зависящая от распределения доходности финансового инструмента. Существует множество метрик, характеризующих величину риска, каждая из которых имеет свои преимущества и свои недостатки. Для каждой конкретной задачи инвестору необходимо выбирать ту метрику риска, которая позволит ему наиболее эффективно и точно справиться с поставленной проблемой. В качестве наиболее известных метрик риска можно привести стандартное отклонение, Valueat Risk (VaR), Expected Shortfall [1], Distortion Risk Measures, Spectral Risk Measures [2] и т.д.

Определившись со своей инвестиционной целью и зафиксировав некоторый временной горизонт, инвестор должен решить проблему выбора наиболее привлекательного инвестиционного портфеля. Каждый инвестор будет стремиться максимизировать ожидаемую доходность и, одновременно с этим, минимизировать риск. Практически во всех случаях на эффективных финансовых рынках ожидаемая доходность портфелей возрастает с ростом риска и, наоборот, убывает с его снижением. В таких случаях очередная дополнительная единица ожидаемой доходности воспринимается как вознаграждение за дополнительную единицу принятого риска. Инвесторы, являющиеся менее склонными к риску, с ростом величины риска будут требовать существенно более высокую доходность, чем те инвесторы, которые являются наиболее склонными к риску. Таким образом, каждому инвестору присуща некоторая степень неприязни к риску, в зависимости от которой принимаются решения о выборе инвестиционного портфеля.

Процесс принятия решения рациональным инвестором о выборе наиболее привлекательного инвестиционного вложения исследуется специальными разделами теории принятия решений. Для моделирования поведения инвестора вводится понятие «функции полезности», зависящей от ожидаемой доходности и степени риска инвестиционного портфеля. Среди всего множества инвестиционных портфелей рациональным инвестором будет выбран тот, у которого значение функции полезности достигает наибольшего значения.

Существует множество подходов, каждый из которых предоставляет различные функции полезности, в соответствии с которыми инвесторами принимаются решения о выборе наилучшего инвестиционного портфеля.

Во всех моделях функции полезности обладают параметрами, отвечающими за степень неприязни инвестора к риску.

Определение точной поведенческой модели инвесторов позволит существенно повысить эффективность инвестирования, а также предоставит возможность управляющим компаниям подготавливать персонализированные предложения по размещению средств клиентов. В соответствии с современной теорией портфельных инвестиций [3] на эффективном фондовом рынке для каждого уровня риска существует оптимальный портфель, удовлетворяющий максимальной доходности. Множество оптимальных портфелей образует так называемую эффективную границу. Денежные средства каждого из клиентов должны быть размещены в одном из этих портфелей. Наличие четкой поведенческой модели инвестора и качественной методики определения инвестиционного профиля клиента (степени неприязни риска) позволяет управляющей компании разместить доверенные средства клиента в наиболее привлекательный с его точки зрения инвестиционный портфель, тем самым максимизируя пользу, получаемую инвестором от финансовых вложений.

Одним из первых подходов, направленных на разработку теории, позволяющей оценивать полезность финансовых вложений инвестора, является теория ожидаемой полезности. Вводится определение функции полезности U, зависящей от величины благосостояния инвестора.

Функция $U : \boldsymbol{R}$[1] $\rightarrow \boldsymbol{R}$ называется функцией полезности (utility function), если она удовлетворяет следующим критериям:

1. $U'(W) > 0$[2] $\forall W \in \boldsymbol{R}$ – функция U является монотонно возрастающей на всем множестве $\boldsymbol{R}$. Данное условия отражает тот факт, что от увеличения объема благосостояния полезность, получаемая инвестором, возрастает.

2. $U''(W) < 0 \ \ \forall W \in \boldsymbol{R}$ – функция U является выпуклой вверх на всем множестве $\boldsymbol{R}$. Смысловая нагрузка данного условия заключается в удовлетворении закону убывающей предельной полезности. Скорость приращения получаемой полезности от добавления очередной единицы блага уменьшается с ростом объема получаемого блага.

3. Функция U непрерывно дифференцируема столько раз, сколько это потребуется.

Согласно теории ожидаемой полезности, при принятии решений инвесторы стремятся максимизировать ожидаемую полезность их благосостоя-

[1] Здесь и далее символом $\boldsymbol{R}$ обозначается множество вещественных (действительных) чисел.

[2] Здесь и далее $U'(W)$ обозначает производную функции U по единственной переменной W.

ния. С математической точки зрения, благосостояние W является случайной величиной. Целью инвестора является максимизация математического ожидания функции полезности $EU(W)$.

Если у случайной величины W существует конечное математическое ожидание $\boldsymbol{E}W$, то $\forall\, W$ для функции U возможно рассмотреть ее многочлен Тейлора четвертой степени относительно W (подробное описание многочленов Тейлора можно найти в работе В.А. Зорича [4]), значение которого приближенно будет равно значению функции U в точке W.

$$U(W) = U(EW) + U'(EW)(W - EW) + \frac{U''(EW)}{2}(W - EW)^2 + \frac{U^{(3)}(EW)}{6}(W - EW)^3 + \frac{U^{(4)}(EW)}{24}(W - EW)^4 \tag{1}$$

При рассмотрении многочленов Тейлора более высоких степеней отклонение значения многочлена от значения $U(W)$становится все меньше и меньше. Вычислим ожидаемую полезность (expected utility) случайной величины $U(W)$:

$$EU(W) = U(EW) + \frac{U''(EW)}{2}\sigma^2 + \frac{U^{(3)}(EW)}{6}\gamma_1 + \frac{U^{(4)}(EW)}{24}\gamma_2, \tag{2}$$

где σ^2 – дисперсия случайной величины W (квадрат стандартного отклонения),

γ_1 – коэффициент асимметрии (skewness) случайной величины W,

γ_2 – коэффициент эксцесса (kurtosis)случайной величины W.

Для решения проблемы выбора оптимального инвестиционного портфеля была разработана современная портфельная теория (Modern Portfolio Theory) [3]. В рамках данной теории в качестве метрики риска используется стандартное отклонение доходности инвестиционных вложений, а в качестве поведенческой модели принятия решений используется теория ожидаемой полезности. В предположении, что доходности всех рыночных инструментов подчиняются закону нормального распределения вероятности [5], функцию полезности $U = U(W)$можно рассматривать в качестве функции двух аргументов μ и σ в связи со сделанным предположением, что $W \in N(\mu, \sigma)$. Принимая во внимание данное замечание и тот факт, что коэффициенты асимметрии и эксцесса нормально распределенных случайных величин равны 0, поведение инвесторов, описанное ранее соотношением (2), после некоторых преобразований можно описать исходя из следующего соотношения:

$$E(U(\mu,\sigma)) = \mu - \frac{1}{2} ARA \cdot \sigma^2, \quad (3)$$

где μ – ожидаемая доходность рассматриваемого инвестиционного портфеля,

σ – стандартное отклонение доходности рассматриваемого портфеля,

ARA – коэффициент абсолютной неприязни к риску (absolute risk aversion).

Степень неприязни к риску определяется величиной показателя ARA. Чем больше данное значение, тем больше величина неприязни инвестора к риску и, наоборот, чем ARA ближе к 0, тем более инвестор является риск-нейтральным. Обычно величина ARA принимает значения от 0 до 10.

В соответствии с современной портфельной теорией на рынке существует оптимальный портфель, находящийся на эффективной границе, который удовлетворяет условию максимальности его коэффициента Шарпа [5]. При условии наличия на рынке безрисковой процентной ставки r_f среди всех портфелей, находящихся на эффективной границе EF^* (effective frontier), инвестор выбирает такой инвестиционный портфель, у которого полезность, определенная выше в соответствии с соотношением (3), являлась бы максимальной. Детальное описание современной портфельной теории и построения эффективной границы EF^* можно найти в источниках [3], [5]. На рис. 1 представлен типичный вид эффективной границы. По оси абсцисс откладывается риск, измеряемый стандартным отклонением доходности портфелей, а по оси ординат – ожидаемая доходность финансовых портфелей.

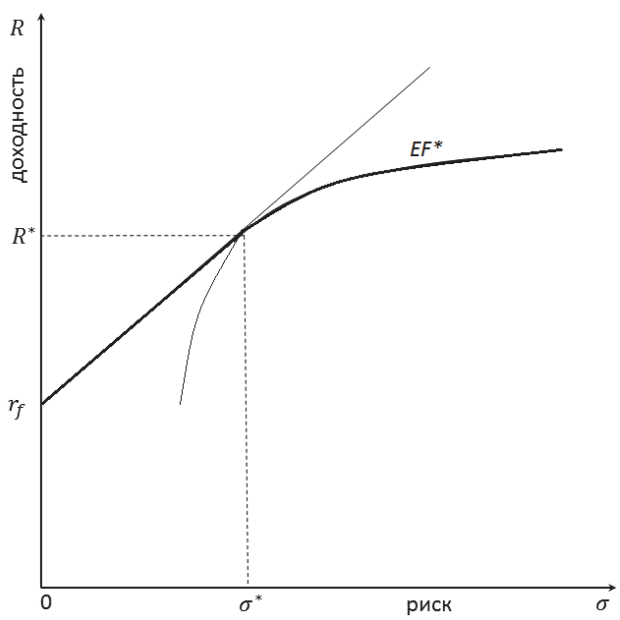

Рис. 1. Эффективная граница

Как было описано выше, теория ожидаемой полезности (expected utility theory) утверждает, что инвестор принимает решение о выборе инвестиционного портфеля, основываясь на оценке его рискованности и потенциальной доходности вложений, а также собственной степени неприязни к риску (risk aversion). При оценке потенциальной доходности теория учитывает лишь абсолютные величины благосостояния инвесторов. Более современные исследования демонстрируют, что инвесторы принимают решения, основываясь на величине отклонения относительно некоторого наперед заданного уровня (бенчмарка), оценивая прибыли и убытки, используя определенные эвристики.

Одной из наиболее прорывных теорий является теория перспектив (Prospective Theory), предложенная в 1979 году Даниэлем Канеманом и Амосом Тверски [6]. Теория описывает процесс принятия инвестором решения между несколькими альтернативами, вероятности различных исходов которых заранее известны. Каждый возможный исход имеет определенную вероятность реализации и ценность, которую инвестор определяет субъективным образом. Основным тезисом теории перспектив является то, что люди склонны переоценивать низкие вероятности реализации одного из альтернативных событий и, с другой стороны, недооценивать высокие вероятности.

Допустим, что инвестор оказался в ситуации, в которой возможна реализация одного из N исходов. Для каждого события инвестору известна вероятность его наступления $\{p_i\}_{i=1}^{N}$, а также доходность $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ каждого из N исходов при текущем (или целевом) уровне благосостояния $\bar{x}$.

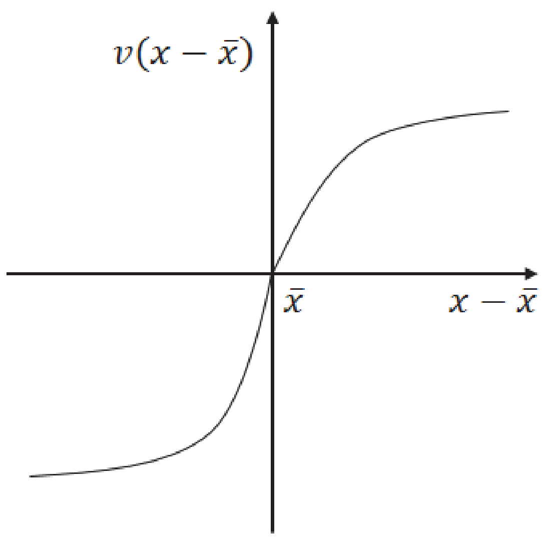

Рис. 2. Функция полезности (value function)
в рамках теории перспектив

В теории перспектив, в отличие от теории ожидаемой полезности, величина «полезности» v (value function), получаемая инвестором в результате реализации каждого из исходов, определяется не $v(x_i)$, а $v(x_i - \bar{x})$. Эскиз функции v представлен на рис. 2. По оси абсцисс откладываются значения благосостояния/доходности, а по оси ординат – полезность.

Функция v в качестве аргумента принимает не абсолютное значение благосостояния инвестора, а величину смещения относительно текущего (или некого целевого) значения его благосостояния $\bar{x}$. При этом следует обратить внимание, что в окрестности точки $\bar{x}$ функция ведет себя не центрально симметрично. Левее точки $\bar{x}$ функция v убывает более стремительно, чем растет правее точки $\bar{x}$. Данный факт объясняется тем, что инвесторы гораздо более неохотно относятся к незначительной потере денежных средств, чем к их приросту на аналогичную величину. Один из возможных видов функции v былпредставленвработе «Rational Choice in an Uncertain World: The Psychology of Judgment and Decision Making» [7].

$$v(x) = \begin{cases} (x - \bar{x})^{\alpha}, & x \geq 0 \\ -\lambda \cdot |x - \bar{x}|^{\beta}, & x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

где, в большинстве случаев, $\alpha = \beta = 0.88, \lambda = 2.25$ – коэффициенты, характеризующие скорость роста/убывания полезности в зависимости от благосостояния/доходности.

Подробное описание и обсуждение функции полезности можно найти в книге M. Verlaine «The Economics of the Asset Management Industry» [8].

В соответствии с теорией перспектив инвестор, помимо того что руководствуется относительным, а не абсолютным изменением своего благосостояния, при принятии решений склонен искажать вероятности реализации различных событий. Инвесторы, принимающие решения, склонны завышать низкие вероятности и, наоборот, занижать высокие.

Рассмотрим процесс принятия инвестиционного решения в условиях неопределенности в рамках теории перспектив. Пусть $\pi : [0, 1] \to [0, 1]$ является функцией искажения вероятностей. Каждой объективной вероятности p_i наступления события i функция сопоставляет субъективную вероятность $\pi(p_i)$, которой будет руководствоваться инвестор при принятии решений. При достаточно малых вероятностях p (например, при $p = 0.01$), субъективная вероятность $\pi(p) > p$, а при достаточно больших вероятностях (например, $p = 0.99$) будет выполняться неравенство $\pi(p) < p$. Однако следует отметить, что абсолютно однозначные (безрисковые) события трактуются инвесторами без искажения вероятностей, то есть $\pi(0) = 0$ и $\pi(1) = 1$.

При наличии N возможных исходов, инвестор оценит ожидаемую полезность V инвестиционного вложения по формуле:

$$V = \sum_{i=1}^{N} \pi(p_i) \cdot v(x_i - \bar{x}) \tag{5}$$

Далее, среди всевозможных альтернатив инвестором будет принято то решение, у которого величина ожидаемой полезности V будет максимальной.

Основными отличиями теории перспектив от теории ожидаемой полезности являются:

- вид функции полезности v: она не является выпуклой вверх, является не дифференцируемой в точке $\bar{x}$, а также вычисляет относительный, а не абсолютный уровень ожидаемой полезности (см. рис. 2).

- инвесторы искажают вероятности: процесс искажения носит субъективный характер; возникает в результате ментальных/подсознательных процессов, не контролируемых человеком. Объективно искажение вероятности может возникать в связи с наличием определенной степени недоверия инвесторов к наблюдаемому распределению в связи с отсутствием точного механизма расчета характеристик финансовых инструментов при моделировании и оценке доходности/рисков.

Развитием теории перспектив послужила кумулятивная теория перспектив. Основное отличие новой теории от своего предшественника заключается в том, что искажению подвергаются не вероятности наступления отдельно взятых событий, а кумулятивные вероятности их реализации (или функция распределения вероятностей).

В соответствии с новой моделью инвесторы подсознательно стремятся завышать вероятности экстремальных значений случайных величин, характеризующих доходности активов и в то же время занижать вероятности средних или ожидаемых значений.

В общем случае инвестор вычисляет субъективную полезность U по следующей формуле:

$$U = \int_{-\infty}^{0} v(x) \frac{\partial}{\partial x}\Big(\pi\big(F(x)\big)\Big)\, dx + \int_{0}^{+\infty} v(x) \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\pi\big(1 - F(x)\big)\Big)\, dx\,, \tag{6}$$

где $v : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ – функция полезности (value function),

$\pi : [0, 1] \to [0, 1]$ – функция искажения вероятности,

$F : \boldsymbol{R} \to [0, 1]$ – функция распределения вероятности.

Величина π характеризует субъективную (искаженную) вероятность наступления события. Эскиз графика функции π представлен на рис. 3. По оси абсцисс отложены значения функции $F(x) = P(X \leq x) \in [0, 1]$, а по оси ординат – значения искаженной (субъективной) вероятности $\pi\big(F(x)\big)$. Следует обратить внимание, что существует точка $x^* \in [0, 1]$, такая что $\forall x < x^* \Rightarrow \pi\big(F(x)\big) > F(x)$, а также $\forall x > x^* \Rightarrow \pi\big(F(x)\big) < F(x)$. В данном свойстве отражается субъективность оценки полезности инвесторами. Заметим также, что скорость роста величины $\pi\big(F(x)\big) - F(x)$ в окрестности точки 0 является монотонно убывающей функцией.

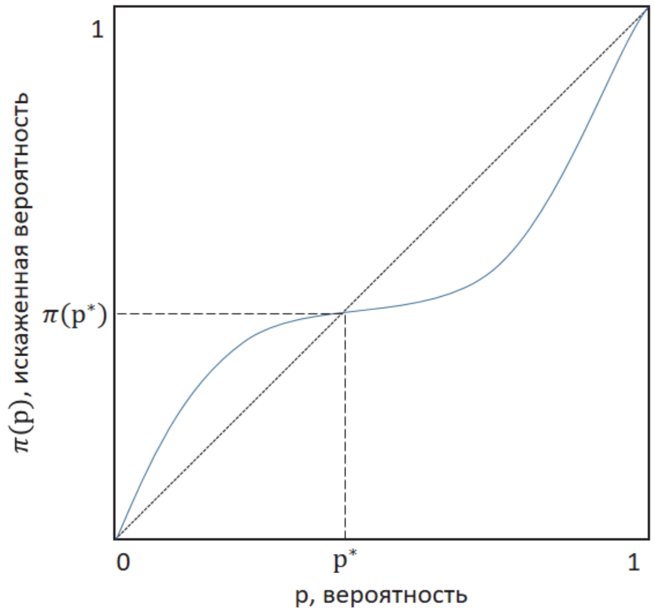

Рис. 3. Функция искажения вероятности

Одной из первых попыток описания вида функции π была предпринята Канеманом и Тверски в 1992 году [9]. Была предложена следующая формула, описывающая ее вид:

$$\pi(p) = \frac{p^\gamma}{p^\gamma + (1 - p^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}, \tag{7}$$

где $p \in [0, 1]$ (объективная вероятность) и $\gamma \in (0, 1]$.

График функции π будет визуально совпадать с эскизом, представленным на рис. 3. Заметим, что при достаточно малых значениях p выполняется неравенство $\pi(p) > p$, в то время как при достаточно больших p выполняется неравенство $\pi(p) < p$.

Рассмотрим крайние случаи значения величины γ. Если $\gamma = 1$, то $\forall p \in [0, 1] \Rightarrow \pi(p) = p$. Иными словами, $\pi \equiv \mathrm{id}$ на множестве $[0, 1]$.

В случае когда $\gamma = 1$, вероятность вообще не подвергается искажению. При принятии решений инвестор использует объективные вероятности.

В данной модели величина $\gamma = 1$ является крайним случаем, характеризующим абсолютную рациональность инвестора. В процессе уменьшения γ степень искажения объективных вероятностей возрастает и, как следствие, тем более иррациональным является поведение инвестора.

Другой крайний случай достигается, при условии $\gamma \to 0$.

$$\lim_{\gamma\to 0+} \frac{p^\gamma}{p^\gamma + (1-p^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p^{\frac{1}{x}}}{p^{\frac{1}{x}} + \left(1-p^{\frac{1}{x}}\right)^x} = \frac{p^0}{p^0+0} = 1 \qquad \forall p \in [0,1]$$

Таким образом, вторым крайним случаем является функция $\pi(p) \equiv 1$. При приближении γ к величине 0 искажение вероятности приобретает все более ярко выраженный характер и при достижении крайнего случая π вырождается в постоянную функцию. Следует отметить, что если рассмотреть функцию $\phi(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\gamma(p)$, то можно доказать, что ϕ является непрерывной функцией в пространстве ограниченных непрерывных функций, определенных на множестве $(0,1]$. Однако на всем множестве $[0,1]$ данное свойство не выполняется.

В качестве другого подхода к оценке вида π был применен специальный аксиоматический подход в работе Prelec [10]. В данной работе функция искажения вероятности приближается к функциям вида:

$$\pi_{\alpha,\beta}(p) = e^{-\beta(-\ln p)^\alpha}, \qquad (8)$$

где $\alpha \in (0,1), p \in [0,1], \beta > 0$. Для упрощения функции величина параметра β зачастую принимается равной 1. Тогда функция примет вид $\pi_\alpha(p) = $ $= e^{-(-\ln p)^\alpha}$.

Каждый элемент семейств функций π_α удовлетворяет свойствам обратимости, монотонному возрастанию, s-образности (выпуклость до определенной точки p^* и вогнутость после нее). Кроме того, $\forall\alpha \in (0,1)$ выполняется условие $\pi_\alpha(e^{-1}) = e^{-1}$[10]. Данное свойство свидетельствует о том, что каждая функция π_α не искажает вероятность $p = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Заметим, что при $\alpha = 1$ функция принимает вид $\pi_1(p) = e^{\ln p}$, а при $\alpha = 0$ функция принимает вид $\pi_0(p) = e^{-1}$. Также немаловажным является тот факт, что $\forall\alpha \in (0,1)$ $\lim_{p\to 0+} \pi_\alpha(p) = 0$ и $\pi_\alpha(1) = 1$.

Было разработано множество подходов, оценивающих функцию искажения вероятности. В большинстве из них, как было упомянуто ранее, утверждается, что поведение инвесторов не является полностью рациональным. Это является проблемой при попытке принятия объективного решения о выборе инвестиционного портфеля, в связи с чем появился альтернативный взгляд на проблему искажения вероятности, сформулированный в рамках подхода к принятию надежных решений.

Подход к принятию надежных решений (Robust decision making, RDM) является множеством итеративных подходов, способствующих выявлению потенциальных надежных стратегий и оценке их уязвимости. RDM применяется в тех случаях, когда инвесторы находятся в условиях «глубокой неопределенности» (deep uncertainty) либо не проявляют доверия к построенным моделям и, как следствие, не могут принять корректного взвешенного решения ввиду высокого уровня неопределенности.

Существует несколько основных отличий RDM от традиционных подходов, основанных на оценке потенциальной полезности (субъективной полезности) принимаемого решения. Во-первых, RDM отвергает предположение, что одно-единственное распределение величины случайной доходности отражает лучшее описание «глубоко неопределенного» будущего. Вместо этого RDM изучает пространства правдоподобных вероятностей, которые могут изменяться в результате получения новой информации и перехода их из одних состояний в другие. Во-вторых, RDM основывается на критерии максимизации определенности, а не оптимальности. В соответствии с данным подходом, в условиях «глубоко неопределенного» будущего, инвесторы стремятся получить наиболее стабильный и предсказуемый финансовый результат своих вложений. В-третьих, RDM использует структуру анализа уязвимостей для того, чтобы охарактеризовать неопределенность и помочь выявить и оценить надежные стратегии. Традиционные методы основаны на подходе, сначала характеризующем неопределенность в отношении будущего и только затем предполагающем использование этой характеристики для ранжирования различных альтернативных решений. В противоположность этому RDM характеризует неопределенность в контексте конкретного решения. Метод определяет те комбинации неопределенностей, которые являются наиболее важными для принятия решения.

Пусть имеется конечное множество возможных исходов (доходностей) $(x_1, \dots, x_M)$, где x_1 – наиболее благоприятный исход для инвестора, а x_M – наименее благоприятный (т.е. имеет место система неравенств $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_M$). Допустим, инвестор наблюдает некоторое дискретное распределение вероятности $(p_1, \ldots, p_M)$. В случае если инвестор считает, что будущее находится в условиях «глубокой неопределенности», т.е. если инвестор не доверяет построенной вероятностной модели и наблюдаемому распределению вероятности, в соответствии с подходом RDM его поведение будет основываться на предположении, что истинное распределение вероятности окажется наихудшим среди некоторого множества распределений, достаточно близких к наблюдаемому $(p_1, \ldots, p_M)$.

Предположим, инвестор допускает, что истинное распределение может колебаться в пределах $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_M), \epsilon_i \in [0, 1]$. Иными словами, инвестор допускает, что существует истинное распределение $(p_1^*, \ldots, p_M^*)$ – такое, что $\forall i \ p_i - \epsilon_i \le p_i^* \le p_i + \epsilon_i \ \Leftrightarrow \ \forall i |p_i^* - p_i| \le \epsilon_i$. Задав вектор возможных отклонений ϵ, инвестор получает множество распределений вероятности $\mathbb{P}$, среди которых имеется $(p_1^*, \ldots, p_M^*) \in \mathbb{P}$.

Перед инвестором возникает задача: ему требуется найти наихудшее распределение вероятности $P^* \in \mathbb{P}$, при котором максимальная ожидаемая доходность портфеля будет минимальной. Таким образом, инвестор ищет такое распределение $P^* \in \mathbb{P}$, что будет достигаться $\max_\omega \min_P EU(ER(\omega), \rho(\omega))$, где $\rho -$ выбранная мера риска, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)^T$ – веса каждого из присутствующих на рынке активов в портфеле.

Данный подход называется max-min optimization. Следуя данной логике, инвестор готовится к случаю истинности наихудшего распределения вероятности, что является одним из наиболее прогнозируемых способов борьбы с «глубоко неопределенным» будущим.

На основе описанных выше подходов появляется практическая возможность построения оптимальных портфелей для конкретных инвесторов. Все описанные модели основываются на предположении, что поиск «наилучшего» портфеля осуществляется за счет максимизации некоторой функции полезности, так или иначе зависящей от ожидаемого уровня риска и доходности портфеля, а также от личных характеристик инвестора – степени иррациональности, неприязни к риску и др. Однако существуют альтернативные подходы, основным отличием которых является тот факт, что инвесторы выбирают инвестиционные портфели, одновременно руководствуясь несколькими целями, по каждой из которых инвесторами проводится отдельная оптимизация.

Одним из наиболее ярких примеров является поведенческая портфельная теория (Behavioral Portfolio Theory, BPT), предложенная в 2000 году Shefrin и Statman [11]. Основным положением данной теории является утверждение, что инвесторы принимают решения, основываясь на трех направлениях. Во-первых, инвесторы стремятся минимизировать риск потерь активов ниже определенного уровня. Объем средств, который не превысят ожидаемые в течение заданного промежутка времени потери с заданной вероятностью, называется VaR $(Value\ at\ Risk)$. Во-вторых, инвесторы преследуют цель максимизации возможной доходности портфеля. В-третьих, портфель инвесторов дополняется такими активами, которые, при благоприятном исходе, могли бы обеспечить существенное обогащения инвестора. Такие активы играют роль «лотерейных билетов»: вероятность реализации существенного выигрыша достаточно низкая, но при этом потенциальная доходность в несколько раз превышает среднерыночную. Каждая из вышеперечисленных целей преследуется инвесторами и слабо зависит от других целей. Портфель клиентов формируется исходя из максимизации эффективности частей портфеля, удовлетворяющих каждой из определенных целей, при этом критерий совокупной оптимальности портфеля может не удовлетворяться.

В соответствии с BPT соотношение активов среди трех частей портфеля является следствием внутреннего эмоционального противоречия инвестора. Установлено, что риск принимаемого инвесторами портфеля определяется двумя основными эмоциями: страхом и надеждой. В случае преобладания страха инвестор будет отдавать предпочтение менее рискованным активам. В случае же преобладания надежды на получение сверхдоходности инвестор будет стремиться увеличивать долю «лотерейных билетов». В результате их противостояния инвесторы перестают принимать рациональные решения и, в частности, возникает функция искажения вероятности. Подробный обзор BPT предоставлен в книге M. Verlaine «The Economics of the Asset Management Industry» [8].

С другой стороны, происхождение функции искажения вероятности может быть объяснено с рационалистической точки зрения. Данная функция может возникать в связи с тем, что инвесторы проявляют определенную степень недоверия к моделируемым значениям и вычисляемым оценкам рыночных характеристик. Кроме того, подсознательная корректировка распределения вероятности возникает в связи с осознанием наличия нерыночных рисков, которые не могут быть должным образом оценены или предсказаны. В результате данных факторов возникает неопределенность, которая не может быть объяснена на основании рациональных подходов.

Существует исследование, основанное на принципе максимизации информационной энтропии [12], в соответствии с которым высказывается предположение, что эмоциональная реакция является оптимальной человеческой реакцией в условиях неопределенности, когда у человека отсутствует возможность провести рационалистический анализ ситуации и принять взвешенное, обдуманное решение. В соответствии с этой теорией функция искажения вероятности является следствием принятия оптимального решения на уровне подсознания инвестора. Таким образом, полагается, что функция искажения вероятности является результатом оптимизации существующей неопределенности на ментальном уровне человека.

В связи с тем, что инвесторы принимают решения в зависимости от их личностных характеристик, возникает идея об использовании инвесторами меры риска, которая бы наилучшим образом отвечала их рисковому профилю. Способность откалибровать данную меру под конкретного инвестора позволит на ее основе проводить оптимизацию инвестиционных портфелей, что существенно повысит их качество и будет наилучшим образом соответствовать личностным характеристикам инвесторов.

Литература

1. Acerbi C., Tasche D. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk // Economic Notes. 2002. С. 379-388.
2. Acerbi C. Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion // Journal of Banking and Finance. 2002. С. 1505-1518.
3. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. С. 77-91.
4. Зорич В.А. Математический анализ // Дифференциальное исчисление. Формула Тейлора. 4-е изд. М.: Изд-во московского центра непрерывного математического образования, 2015.
5. Sharpe W.F. Investments // New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2015.
6. Daniel Kahneman & Amos Tversky. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica. 1979. С. 263-291.
7. Reid Hastie. Rational Choice in an Uncertain World // The Psychology of Judgment and Decision Making. 2001.
8. Verlaine M. The Economics of Asset Management Industry // Editions Universitaires Europeennes, 2016.
9. NeilsonW. Probability transformations in the study of behavior toward risk // Synthese. 2003. С. 171-192.
10. Prelec D. The probability weighting function // Econometrica. 1998. Т. 66. С. 497-527.
11. Shefrin H., Statman M. Behavioral Portfolio Theory // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 2000. С. 127-151.
12. Verlaine M. On the origin of S-shaped probability weighting // ICN Business School, 2011.