

## **ОЦЕНКА ПРОГНОЗНОЙ ФУНКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ**

**КЛЮЧНИКОВ Олег Игоревич, к.э.н<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Кафедра Банковского бизнеса и инновационных финансовых технологий,  
Автономная некоммерческая организация высшего образования  
«Международный банковский институт», Санкт-Петербург, Россия

Адрес для корреспонденции:

О. И. Ключников, 191023, Невский пр., 60

Т.:+79219549889; e-mail: okey003@mail.ru

### **Аннотация**

В статье финансовый рынок представлен как динамическая система, чувствительная к начальным условиям, постоянно эволюционирующая от порядка к хаосу и обратно, управляемая аттрактором. Такой подход позволил выявить прогнозные функции динамических систем, использование которых позволяет проводить текущие и перспективные оценки состояний цен и рынков.

В статье предпринята попытка подойти к формулированию финансового и математического понятия «прогнозная функция» динамической системы финансового рынка. Проводится классификация динамических систем финансовых рынков, включающих различные виды прогнозных решений. Рассматриваются аттракторы системы ценообразования, фракталы финансовых рынков, обсуждаются фундаментальные свойства линейных и хаотических ценовых решений. Показана возможность использования аттракторов в качестве механизма согласования спроса и предложения. В статье выдвигается гипотеза универсальности метода бильярдного шара для прогнозирования цен. Показан прогресс в области прогнозирования цен на финансовых рынках.

### **Ключевые слова**

Динамические системы, финансовые рынки, теория хаоса в финансах, прогнозирование цен, фракталы.

UDC: 336.01; 336.02

## **EVALUATION OF PREDICTIVE FEATURES OF DYNAMIC MODELS OF FINANCIAL MARKETS**

**KLYUTCHNIKOV Oleg I., PhD in Economic<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Department of banking business and innovative financial technologies,

Autonomous nonprofit organization of higher education  
«International Banking Institute», Saint-Petersburg, Russia

Address for correspondence:

O.I. Kliuchnikov, 191023, Saint-Petersburg, Nevsky pr., 60

T.: +79219549889; e-mail: okey003@mail.ru

## **Abstract**

The article presents the financial market as a dynamic system sensitive to initial conditions, constantly evolving from order to chaos and vice versa, controlled by an attractor. This approach made it possible to identify the predictive functions of dynamic systems, the use of which allows for current and prospective assessments of price and market conditions.

The paper attempts to approach the formulation of the financial and mathematical concept of the “prediction function” of a dynamic financial market system. The classification of dynamic systems of financial markets, including various types of prediction decisions, is carried out. Attractors of the pricing system, fractals of financial markets are considered, the fundamental properties of deterministic and chaotic price decisions are discussed. The possibility of using attractors as a mechanism for matching supply and demand is shown. The article puts forward the hypothesis of the universality of the billiard ball method for predicting prices. The progress in prediction prices in financial markets is shown.

## **Keywords**

Deterministic dynamic systems, financial markets, chaos theory in finance, price forecasting, fractal.

## **1. Постановка проблемы**

Ощущение прогресса – важная часть современной финансовой теории. В его задачу входит прежде всего реализация мотивации рыночных участников и утверждение или смена действующей финансовой парадигмы. В каждой сфере прогресс устроен по-разному, например, у игроков казино – это переиграть рулетку, в соревнованиях – победа над противником, в игровом симуляторе – прохождение всех этапов игры, в теории финансов – утверждение новых концепций и методов анализа рынка, а также практическая помощь его участникам. У финансовой науки есть три вида прогресса – прогресс исследователя финансового рынка (обучение и научение), прогресс финансовой теории (новые методы и концепции, ревизия или переутверждение традиций), прогресс участника рынка (расширение понимания рынка и включение в хозяйственный оборот новых прогнозных процедур).

Прогресс исследователя финансового рынка – это, по сути, прежде всего рост навыков, в том числе связанных с методами изучения рынка. В то время как прогресс финансовой теории строится на расширении богатства самой науки, прогресс же финансовых рынков сводится в первую очередь к новым формам движения активов и видам институтов, новым продуктам и услугам, а также новым технологиям. Эта статья не рассматривает прогресс на финансовых рынках, да и не предполагает охватить все составляющие прогресса финансовой теории. Задачи статьи более скромные – показать от-

дельные стороны прогресса в направлении мобилизации прогнозных функций динамических систем.

В качестве объекта выбраны детерминированные и хаотические динамические системы финансовых рынков, способ рассмотрения которых вполне предметен. Он связан прежде всего с желанием понять механизм траекторий цен и поэтому направлен на поиск прогнозных функций динамических систем, на базе которых можно оценивать будущее финансовых рынков. В основном поиск идет в направлении определения траекторий цен финансовых активов в условиях возросшей неопределенности и неустойчивости рынка.

С момента открытия Ньютоном своих законов появилась возможность предсказания будущего для простых механических систем. Задача сводилась к решению дифференциальных уравнений. Эти уравнения обладают замечательными свойствами – их решение однозначно обусловлено самими уравнениями, а начальные свойства подготавливают ответы. Знания системы и начального ее состояния позволяют с помощью таких дифференциальных уравнений установить будущее состояние цен и рынка в любой другой момент, отличный от начального момента времени. С помощью таких уравнений можно получить достаточно простые объяснения связей в различных системах. Данный подход, по сути, лег в основу идеи равновесия и теории эффективности рынка, традиционно определяющих финансовый рынок. В результате в моделях, построенных на такой теоретической базе, рынок изображается как детерминированная динамическая система. Лаплас заметил, что если бы была возможность увидеть положение и скорость всех частиц одновременно, то можно просчитать любое их будущее состояние. Однако данный подход скрывает множество проблем, например, связанных со случайностью, свободой и ее ограничениями, а также с индивидуальными ощущениями, чувствами и эмоцией рыночных игроков. Эти проблемы способны существенно отклонять рыночную реальность от результатов, полученных с помощью известных дифференциальных уравнений в рамках динамических систем. Тем не менее оценка будущих цен с учетом прогнозной направленности динамических систем позволяют расширить методологический инструментарий прогнозного моделирования.

Математики заинтересовались условиями устойчивости финансового рынка еще в начале 19-го века. В начале 20-го века они предложили рассматривать финансовый рынок как динамическую систему, что позволило

перейти к новому этапу изучения и математического описания финансового рынка. В частности, к оценке уровня устойчивости рынка и прогнозу его будущего состояния, оценкам вероятности различных сценариев развития и стабильности [1].

В 1980-х годах немногие экономисты, работающие над стабильностью и неустойчивостью, стали заигрывать с теорией бифуркации. Интерес к этой теории был подогрет перспективами ее использования для прогнозирования цен, что стало новым и достаточно неожиданным, по крайней мере для финансистов. Дело в том, что переход к анализу хаотических систем привел к формальному конфликту с основными макроэкономическими концепциями [2]. В качестве примера можно взять неоклассическую теорию «рационального» рынка или теорию «эффективного» рынка, которые строились преимущественно на линейных системах и концепциях [3]. Прогнозирование цен в таких условиях было весьма простым делом, а все оценки будущего на восходящей стадии развития практически соответствовали реальным событиям. Теория Кейнса также не была связана со сложным моделированием, на ее основе строились также простые прогнозы. Между 1986 и 1998 годами было проведено много исследований в области экономики в отношении хаотических систем [4]. Пришли к пониманию эндогенного происхождения случайности (до этого за ее основу принимали экзогенные факторы). Позднее в качестве основных эндогенных обстоятельств случайности и неопределенности финансов была принята их инновационность [5]. Еще в конце прошлого века разработали целый ряд эконометрических моделей хаоса с включением временных обстоятельств. Однако исследователи финансов проявили интерес к теории хаоса значительно позднее и до сих пор он незначителен [6].

Изменение отношений к традиционным способам прогнозирования и оценкам состояния рынка связано с переходом финансового рынка с относительно длительной стадии стабильного развития к стадии повышенной неопределенности и неустойчивости [7]. В новых условиях рынка потребовалось пересмотреть отношение к некоторым традиционным положениям и моделям и провести поиск новых потенциальных методик прогнозирования. Как известно, нередко новое находится в забытом старом. В данном случае известные модели и динамические системы, а также теории и гипотезы из смежных отраслей знаний позволяют пересмотреть прогнозный потенциал науки.

В данной статье рассматриваются вопросы поведения финансовых рынков как динамических систем с учетом их прогнозной направленности. Такой подход позволяет выделить прогнозную функцию динамических линейных и нелинейных систем финансовых рынков.

## **2. Подходы к прогнозированию**

Финансовые рынки – сложные комплексные системы. В последнее время принято их относить к классу детерминированных динамических систем (ДДС), которые со временем эволюционируют в заданных направлениях [8]. Поэтому движение на финансовых рынках описывается динамической системой уравнений, которыми отображают отношения между различными сторонами рыночной активности, характеризующими, например, положение рынка (количество операций, их стоимость, дневная активность, максимальные и минимальные цены и т.п.); возможен анализ с позиции взаимодействия внешних (в частности, государственное регулирование) и внутренних свойств рынка (инновационность, консерватизм банкиров и др.).

Типичен следующий подход к таким динамическим системам: если известно начальное условие системы, например, IPO (начальные предложения ценных бумаг), и проведен первичный опрос потенциальных покупателей (спрос в разрезе цены и объема), то можно точно предсказать последствия, то есть события после выпуска ценных бумаг. На финансовом рынке, представленном как детерминированная динамическая система, даже если приближение начальных условий не совсем верны, прогнозируемые действия по-прежнему могут быть очень близкими к предполагаемым результатам.

Совершенно по-другому выглядит картина в хаотической динамической системе, в которой даже небольшое изменение начальных условий ведет к принципиально иным последствиям. Но при ближайшем рассмотрении эти различия могут действовать достаточно формально.

Важной проблемой финансовой теории и практики являются предсказания будущего состояния рынков. Задачу можно свести к анализу поведения детерминированных и недетерминированных финансовых систем. Для детерминированных систем прогноз будущего можно проводить в виде поиска линейных и нелинейных связей и зависимостей с учетом времени и пространства (для различных стран).

Понимание финансового рынка как эффективного рынка получило развитие последние полвека. В таком виде он не выходит за рамки выражения как детерминированная динамическая система. Оператор таких систем  $\phi_t$

позволяет рассматривать систему с параметрами  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , определяющими ее состояние в каждый момент времени  $t$ . Для линейных систем уравнение примет следующий вид:  $\varphi_t[x(t) + y(t)] = \varphi_t[x(t)] + \varphi_t[y(t)]$ . При этом изменение цен можно описать при помощи следующей системы дифференциальных уравнений:  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_2, x_3, \dots, x_n) \dots \dot{x}_n = f_n(x_1, \dot{x}_2, x_3, \dots, x_n)$ . То есть представить в виде системы с траекторией цен от начальных координат  $x$  к конечным координатам  $x_n$ , для упрощенного описания которой вполне подходит формула линейного осциллятора с затуханием –  $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} = 0$ . Если требуется большая точность и приближение к реальным условиям рынка, то можно воспользоваться другими портретами системы, например, синусоидным осциллятором, осциллятором Ван дер Поля и др.

Посредством линейных ДДС достаточно просто прогнозировать рынки. В основе вычислений находятся статистические ряды. В основном используют тот или иной метод экстраполяции прошлых результатов на будущее, что в условиях относительно устойчивого развития позволяет получить достаточно достоверные результаты. Однако в условиях повышенной неопределенности и неустойчивости прогнозные данные могут существенно отличаться от реальных рыночных результатов. Тогда требуется привлечение других прогнозных методик. Нелинейные ДДС позволяют учитывать не только прошлые результаты, но и выделять текущие особенности, которые способны принципиально изменить траектории цен. Для этого стали привлекать байесовские методы прогнозирования [1] и теорию хаоса [6]. В данной статье проведен анализ прогнозирования

Несмотря на формальное решение в 1970-х гг. проблемы эффективности рынка, данная тема снова стала привлекать внимание исследователей. Финансовый кризис 2008 г. развернул рыночный тренд с относительной стабильности и достаточной обзорности будущего на неопределенность и, соответственно, нестабильность. Будущее финансового рынка стало больше зависеть от случайности, чем от определенности. Государственное регулирование пытается компенсировать такой переход. Но и оно претерпевает значительные изменения, и его будущее также неопределенно.

Для нерегулируемой динамики финансового рынка, больше соответствующей гипотезе его неустойчивости, хаотические системы определяют ход развития. В одних случаях они могут быть детерминированными, а в других – недетерминированными. Для первых систем возможно воспроизводство начальных условий, с повтором сценариев развития – противостояние спроса и предложения; когда между ними прекращаются взаимодей-

ствия, рынок прекращает существование. Но при наличии взаимодействия всегда находится консенсус. В таких случаях возобновляются условия и повторяются сценарии, а изменения начальных условий принципиально не влияют на результаты – противостояние спроса и предложения и поиск консенсуса. Такие процессы обычно происходят в хаотических системах в рамках одной фазы цикла.

Совсем по-другому все происходит в недетерминированных системах. Небольшие изменения начальных условий ведут к различным результатам – смене фазы цикла, например, с роста – к падению и кризису.

Следовательно, на изменения характера хаоса системы влияет ход цикла – в рамках одной фазы хаотические процессы рынка вкладываются в детерминированные системы, а в случаях смены циклов – детерминированность неочевидна. Таким образом, теория хаоса финансовых рынков неразрывно связана с теорией их циклов и, на наш взгляд, данные теории должны рассматриваться в едином комплексе.

В целом в хаотических системах и первого (детерминированные), и второго (недетерминированные) типа внешне случаен набор компонентов, поскольку для таких систем контролировать условия с приемлемой точностью невозможно и, следовательно, результаты прогнозов их развития с использованием традиционных методик в большинстве случаев недостоверны. Однако результаты таких прогнозов как для первого, так и второго типа не совсем случайны. Они могут быть вполне обусловленными входными условиями и, следовательно, предсказуемыми – как в рамках одной фазы цикла, так и при переходе из одной фазы в другую.

Таким образом, хаос финансовых систем имеет определенный порядок, который можно идентифицировать и математически вычислить, как и вероятность его наступления из набора возможных сценариев. Дело в том, что цены как качели – постоянно раскачиваются из одного положения в другое и обратно. Раскачивание происходит под воздействием внешних импульсов. Генератором качания служат спрос и предложение, взаимодействие которых в рамках колебаний цен можно рассматривать как простой осциллограф. В таком случае снова возникает вопрос линейной детерминированности систем. Движение цен по законам простого осциллографа вполне подходит к понятию «идеальный рынок», в котором дисперсия цен определяется и управляется аттрактором. В соревновании спроса и предложения устанавливается консенсус – срабатывает закон аттрактора, поскольку колебания происходят вокруг определенного векторного значения,

которое может принимать противоположную направленность в разных фазах цикла.

Итак, утверждение о возможности предсказания поведения цен в силу повторяемости спроса и предложения не согласуется с положением непредсказуемости и неповторимости сценариев хаотических систем. Тем не менее данное отрицание вполне формально, поскольку существуют различные компенсаторы и методики, позволяющие перейти к описанию и параметризации траекторий цен даже в условиях полной неопределенности рынка. В целом теорию хаоса можно представить как антитезу теории эффективного рынка и современной парадигмы финансового рынка, базой которой является рыночное равновесие. В свою очередь она может выступать продолжением и основой познания рынков в условиях повышенной нестабильности и неопределенности.

С учетом сказанного выше, исследование финансового рынка можно свести к изучению его математической модели. В качестве примера можно предложить следующие модели (движение от более простых к более сложным моделям):

1. Модель финансового рынка, составленного в виде консервативного осциллятора –  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ , которая сводится к самой простой модели математического маятника –  $\ddot{x} + x = 0$ . В нелинейной форме ее можно представить следующим образом:  $\ddot{x} + x - \frac{x^3}{6} = 0$ . Конечно, на рынке редко наблюдаются такие простые колебания. Тем не менее как образец идеальной колебательной ритмичности ценовых значений такой пример вполне приемлем. С его помощью наглядно демонстрируется принцип возврата цен к некоему исходному значению, то есть прогнозирование чрезвычайно простое – цены обладают циклами роста и падения.

2. Модель финансового рынка с учетом фактора времени можно записать в виде нелинейного консервативного осциллятора следующим образом  $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Цены принимают следующие величины –  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  для некоторого момента времени  $t = t_0$ . Векторную форму данного уравнения можно представлять –  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  вектор-функция скалярного аргумента-размерности  $N$  в определенном временном интервале. Так можно моделировать состояние финансового рынка в пространственном и в динамике – изменение цен представлено при смене траектории в разных фазах цикла. Для этого необходимо установить начальные

координаты и определить скорости изменения цен. Финансовый рынок выражается через модели нелинейных систем. Тем не менее его можно упростить. Для этого можно прибегнуть к процедуре линеаризации. Дело в том, что при незначительных возмущениях на одной фазе финансового цикла линейные зависимости достаточно точно отражают реальные процессы. Поэтому линеаризация позволяет быстро и с малыми затратами провести достаточно приемлемый по точности прогноз развития на небольшой промежуток времени. По сути, данным прогнозом пользуются многие: биржевые игроки применяют волновую теорию Эллиотта для оценки будущих цен и направлений их движения [9].

Понятия аттрактора можно лучше понять при исследовании поведения маятника с трением. Трение рассеивает энергию системы, что ведет к переходу маятника в спокойное состояние в нижней точке – точке притяжения, что представляет собой точечный аттрактор. Собственно таким аттрактором является цена купли-продажи активов, в которой сводится консенсус спроса и предложения, интересов покупателя и продавца. Маятник описывается двумя переменными, которые непрерывно изменяются – скорость и позиция как функция времени. Однако, когда эти переменные преобразуются в область фазового пространства (где время отсутствует), они могут быть построены как спираль, которая скручивается внутрь к точке притяжения в положении 0 и скорости 0. Другой вариант, когда требуется оценить временную перспективу незатухающего колебания – например, траектория движения цен во времени, – тогда аттрактор имеет векторную направленность. Данный вариант лучше подходит для прогнозной ориентации цен.

3. Если использовать правила оператора системы, то «кинематическую» модель рынка можно представить следующим образом –  $x(t) = T_t x(t_0)$ , где  $T_t$  – оператор системы. Он отражает эволюцию рынка (векторная величина) – правило определенных преобразований функции  $x(t)$ . Оператор, отталкиваясь от начального состояния системы – соответствующих началу прогнозирования рыночных цен  $x(t_0)$ , – определяет цену  $x(t)$  при  $t > t_0$ . Причем оператора можно представить как в линейной, так и нелинейной форме. В первом случае преобразования представлены в виде перехода от одного вектора к другому; переход совершается посредством проекции начального вектора на проектный вектор –  $T: X_n \rightarrow X_{n-1}$  (используя преобразования Лапласа  $\Delta = \nabla^2$ ). Процесс интегрирования принимает следующий вид  $T: X(a, b) \rightarrow X(b, a)$ . Такие преобразования позволяют выявлять «весовые» зна-

чения различных параметров рынка, и тогда прогнозы цен можно проводить с учетом различных весовых значений.

4. При смене вектора движения рынка – переходе с одной фазы на другую нельзя игнорировать возможность накопления изменений. Оператор учитывает изменения рынка в соответствии с нелинейными процессами, что записывается следующим образом –  $y(t) = g[x(t)]$ , где  $g(x)$  является однозначной функцией  $x$ . Тогда плотность распределения вероятностей различных значений цен принимает следующий вид –  $p(Y) = \frac{dP[x_t \in A(Y)]}{dY}$ . Посредством оптимизации результатов можно находить лучшие варианты.

В рассмотренных вариантах небольшие изменения начальных условий принципиально не влияют на конечные результаты, что позволяет проводить достаточно достоверное прогнозирование в рамках текущих фаз финансового цикла. Однако в ходе всего цикла незначительные возмущения начальных условий могут вести к различным и порой диаметрально противоположным последствиям: в одних случаях при детерминированности системы в рамках одного цикла – к незначительным погрешностям прогнозных результатов, при повышенной неопределенности и нестабильности системы, в рамках цикла при переходе с одной фазы на другую, – к смене траектории цен. В устойчивых системах незначительные изменения начальных условий слабо влияют на надежность результатов, а в неустойчивых – способны принципиально поменять вектор развития системы.

### **3. Случайные события, методы их оценок, роль аттракторов в упорядочивании рынка**

Прогнозное ценообразование вращается вокруг компромисса между будущими преимуществами клиента и будущими запросами продавца. Можно ли математическим методом найти золотое сечение в компромиссе и с достаточной достоверностью оценить будущие цены? И какой метод оценки преимуществен для хаотических систем финансовых рынков – статистический или байесовский?

Хаотические системы на первый взгляд выглядят случайными. Термин «случайный» имеет вполне определенный не только математический, но и финансовый смысл. К случайным траекториям цен принято относиться как к непредсказуемым либо с определенной вероятностью предсказуемости. Математический образ движения цен на рынке в предполагаемом направлении можно задать с помощью аттрактора. В общем разбросе цен выделяется их

направленность, к которой тяготеют цены всех участников рынка. В отдельных сферах действие данных сил достаточно хорошо статистически проверено. В финансах также существуют хорошо себя зарекомендовавшие методы расчетов случайных процессов.

Одним из примеров может служить следующий метод. Так, случайным процессом является  $\{X_t\} - T$ , где  $T \in [0, +\infty]$  – процесс с независимыми приращениями, если для любого  $t_0 < t_1, \dots, t_n > T$ ; так что  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ ; случайные величины  $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}, X_{t_n}$  независимы. В этой модели случайные и независимые события могут быть определены как статистически идентичные (с точки статистического расчета любым ценам назначены соответствующие порядковые номера) за определенный промежуток времени. Эту модель можно рассматривать как своего рода вариант броуновского движения [1].

В целом случайные события невозможно контролировать с достаточной точностью и, соответственно, отображать в моделях процессы, связанные с ними, что снижает достоверность прогнозирования. На выходе модели результаты не являются случайными. Они вполне детерминированы состоянием системы, что позволяет их предвидеть. Однако в таких системах небольшие изменения начальных условий могут менять результаты коренным образом. Если учитывать, что переменные эволюционируют во времени, то различия могут быть весьма существенными. С помощью теории хаоса можно уловить некую логику и определенную структуру непредсказуемости и отобразить их в различных сценариях. Существуют, по крайней мере, два способа рассматривать эти сценарии: первый связан с определением уровня вероятности наступления каждого из них, а второй – путем наложения сценариев друг на друга и рассмотрения такого пакета с позиции фрактального анализа [11] рассчитать вероятность наступления каждого из них.

При поиске возможных вариантов будущих цен как случайных событий необходимо решить предпочтительность моделей ценообразования и методик вероятностных оценок будущих цен. Выделяются два подхода к ценообразованию и прогнозного моделирования:

1) интерпретация частотной вероятности. Классическая интерпретация частотной вероятности:  $p(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$ , где  $N$  – количество финансовых циклов за определенный период времени,  $n(E)$  – количество рецессий  $E$  (событий) в течение определенного периода времени. Каждый цикл повторяем (в принципе идентичен). В этом отношении каждое повторное финансовое событие нельзя рассматривать как единичное. Тем не менее время начала колебаний,

амплитуда, длительность, причины и последствия в принципе уникальны, так же, как и взлеты и падения, но все эти события повторяемы. К недостаткам этого метода можно отнести следующее: отсутствует возможность категорических утверждений о вероятности какого-либо истинного значения. При определенном уровне надежности только верхний и нижний пределы сохраняют повторяемость;

2) Байесовская статистика, субъективная вероятность. Предварительные субъективные допущения включены в расчет вероятностей гипотез  $H$  (для различия двух вариантов вместо обозначения  $E$  – события, использованного в предыдущем уравнении, применяем другое обозначение события –  $H$ ),  $p(H)$  – степень убежденности в том, что  $H$  истинно.

Метафорически: вероятность – это отношение текущей оценки к ожидаемому результату, например, к росту или падению цен, рыночному подъему или спаду.

Так, выберем два численных значения цен:  $A$  и  $B$ . Вероятность  $A$  равна  $p(A)$  и  $B$  соответственно,  $p(B)$ . Тогда вероятность  $A$  или  $B$  равна  $p(A \text{ или } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ и } B)$ . Поскольку  $A$  и  $B$  взаимно исключаются, то  $p(A \text{ и } B) = 0$ . Частный случай:  $B = \bar{A}$  (цена с числовым значением  $A$  не происходит),  $p(A \text{ и } \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) = 1$ .

Переход к байесовской математике в финансах принципиально меняет сам подход к точности прогнозов и их интерпретации. Если раньше точность была достаточно фиксированной и не вызывала сомнений, то в новых условиях точность стала скорее условной и субъективной. Такой переход вызван условностью измерений в пределах установленных параметров. Новые правила измерения основаны на теории игр. В общем, современный подход к вероятности тех или иных цен в других финансовых событиях основан на синтезе объективного и субъективного в измерениях, частотной и байесовской статистики. Его использование стало возможным только благодаря переходу к полной оцифровке финансовых данных [12], что позволило не только значительно расширить параметры, которые включались в модели, но и изменить подход к обработке данных. Таким образом, во многом переход к новым методам прогнозного ценообразования и моделирования был подготовлен революционными изменениями в финансах, вызванными появлением «больших данных» и их «оцифровке».

Характеристика случайности текущих цен и тем более оценка будущих их состояний была бы неполной без введения в исследование понятия «странный аттрактор». Концепцию странного аттрактора можно лучше всего

объяснить с помощью модели реального финансового рынка, в которой траектории цен можно отобразить в виде точек на графике с координатами время-цена, траектории спроса и предложения, а также государственного регулирования в зависимости от времени с одинаковыми начальными состояниями. Движение цен явно хаотично и к тому же с постоянным изменением спреда между ценой спроса и ценой предложения. Чтобы визуализировать странный аттрактор для динамической системы финансового рынка, можно выбрать набор ценовых значений на протяжении определенного времени. Каждое значение в наборе имеет свое начальное значение и свои условия спроса и предложения и взаимодействия с внешними обстоятельствами – все вместе они представляют собой случайный набор равных разнесенных точек в графике. Но точки разъединены во времени, то есть сделки совершаются дискретно, поэтому между точками возможны разные промежутки. Однако странный аттрактор показывает общее направление цен. Формально между ним и вектором незаметны различия. Однако странный аттрактор показывает общее движение рыночной системы от хаоса к порядку через тяготение различных цен к аттрактору – репрезентативным ценам финансовых активов, которые определяют общее движение рынка. Вектор лишь придает направленность скалярным величинам цен и выступает индикатором их хаотического или упорядоченного движения.

Чтобы получить концептуальную модель аттракторов в качестве механизма выравнивания цен между спросом и предложением, сначала необходимо определить ключевые переменные и атрибуты аттракторов хаоса. Это делается путем перевода характеристик аттракторов из метафорической или общей среды в среду реального рынка с текущим спросом и предложением. Затем эти переменные (спрос и предложение) объединяются в концептуальную модель, пригодную для дальнейших исследований. Во всех случаях хаотическое поведение рынка проявляется в пределах аттрактора. При этом аттракторы обеспечивают структуру и согласованность движения цен на рынке. Поэтому фрактальные модели поведения цен выступают основанием для прогнозирования цен – обеспечивают оценку их направленности и обладают потенциалом создавать порядок из хаоса.

#### **4. Метод бильярдного шара для прогнозного ценообразования**

Бильярдная игра породила множество математических вопросов и послужила для приложения полученных знаний ко многим отраслям хозяйства. Примеры из бильярдной игры достаточно часто используют для иллюстра-

ции различных математических задач и исследований в области механики. В статье выдвигается гипотеза возможности использования метода бильярдного шара для прогнозного ценообразования.

Несмотря на многочисленную литературу, посвященную математическим описаниям движения бильярдного шара и применению данной методики в различных сферах [13;14], до сих пор еще отсутствует ее применение в финансах, в частности для объяснения траекторий цен. В статье бильярдный стол представлен в виде различных плоских фигур, а также в виде пространственного футбольного поля с неровными краями, напоминающими по очертанию изрезанную береговую кромку; движение бильярдного шара по горизонтальной плоскости рассматривается как без трения, так и с трениями. Описать движение цен можно с помощью теории бильярдного шара. Для финансовых рынков трения шаров можно интерпретировать как шумовые и фоновые воздействия, а также государственное регулирование рынка, в результате которого происходит отклонение цен от их естественного уровня. В принципе данная теория может служить основой для разработки определенного типа динамических линейных систем в случае с гладкими бортами, стандартным игровым полем и отсутствием трения и нелинейных систем при значительном расширении игрового поля с неровными бортами, обладающими фрактальными характеристиками и трениями.

Игроков всегда интересовала траектория бильярдного шара после отражения его от борта и особенно от другого шара или при двойном рикошете. В 1775 г. итальянский математик Фаньяно деи Тоски (1682–1766), пожалуй, первым попытался привлечь математический аппарат для описания поведения бильярдного шара [15]. Он предложил задачу, в которой с изменением параметров бильярдного стола достигается такая траектория шара, которая позволяет ему возвращаться на исходные позиции. Так, представляя стол в виде треугольника с острыми углами, были рассчитаны условия, когда шар, отталкиваясь от бортов, возвращается к своему исходному положению. По сути, данная задача относится к проблемам поиска минимальных / максимальных решений в определенных пределах с производными [16].

В 1835 г. французский физик Гаспар Густав Кориолис (1792–1843) написал книгу «Математическая теория явлений бильярдной игры» [17], в которой рассматривал действия живой силы (современный термин «кинетическая энергия»), сил инерции и центробежной силы инерции (кориолисовы силы) на бильярдном столе в ходе движения шаров. По сути, его теория стала основой для многочисленных исследований движения объектов.

На наш взгляд, траекторию движения цен на рынке можно сравнить с траекторией движения бильярдного шара. Для малого треугольного стола с острыми углами движение шара определяется конфигурацией стола и физическим законом, при котором угол падения равен углу отражения. В оптике угол падения света не равен углу отражения только если луч падает в среде с одной оптической плоскостью. Интерпретация таких вариантов в финансовой среде означает, например, полное подавление рыночных сигналов покупателей в условиях рыночного застоя.

В обычной соревновательной среде спрос и предложение действуют как две равнозначные линии (но разной направленности) или взаимодействующие и равные по своему значению силы. Если физические модели строятся на идеальных и объективных условиях, то рыночная среда требует введения в модели коэффициента, который коррелирует зависимости, поскольку нужно учесть субъективные обстоятельства и множество экзогенных факторов. Для определения угла отражения от угла падения преобразования достаточно просты: проекция первоначального вектора на нормаль позволяет разложить вектор на компоненты, параллельные нормали и перпендикулярные ей; далее суммирование инвертированного параллельного компонента (то есть со знаком минус) с сохранением перпендикулярного дает вектор отраженного луча. Правда, можно воспользоваться более простой формулой –  $\sin i_k = \frac{d_i}{s}$ , где  $d$  – цена спроса,  $s$  – цена предложения. В соответствии с формулой при увеличении угла падения  $i$ , угол отражения также возрастает, что соответствует рыночным условиям спроса и предложения. Так, при преобладании спроса над предложением угол отражения увеличивается. В результате возрастает ценовой спред. То же самое происходит и в условиях, когда предложение выше спроса. Но тогда спред инвертируется.

По сути, описанными выше правилами регулируются цены спроса и цены предложения на идеальном рынке. В сжатых пространствах небольших треугольников траектории имеют место определенные топологические формы; при расширении поля поведение меняется, если же видоизменяется конфигурация стола – появляются различные выпуклости и вогнутости (как у береговой линии, которая принимает фрактальный вид – с трудно измеримой протяженностью береговой линии при следовании за всеми зигзагами, выступами и впадинами), то траектории становятся хаотическими. Для приложения теории бильярдного шара к финансовому рынку нами выбран вариант стола с увеличенными до футбольного поля размерами и измененной конфи-

гурацией, а также с трениями. Масштабы рынка и его конфигурации (государственное регулирование, монополистическое воздействие или рыночная свобода) меняют траектории цен. Так, изменение процентной ставки центрального банка меняет движение капиталов: под воздействием изменения доходности кредитных и фондовых ценностей (цен на деньги и цен на ценные бумаги) происходит перелив между денежным и фондовым рынками.

Интересно расширить проблему отражения и рассматривать ее не только применительно к бильярдному шару, но и к свету и приложить данные положения к финансовому рынку. Например, можно применить правило диффузного отражения света – отражения света от неровной поверхности, когда лучи расходятся в разные стороны. Для финансовых рынков это означает больший ценовой спред. На практике чем выше хаотичность рынка, тем больший ценовой спред. В некоторых случаях приемлемо правило ретро-рефлексии (возврат света в том же направлении, что и основной луч), когда цена предложения совпадает с ценой спроса.

Очередным вариантом является множественность рефлексии (что встречается при расположении двух зеркал друг против друга – тогда направления лучей принимает бесконечное значение), означающая множественность ценовых вариантов цен спроса и предложения на один и тот же финансовый актив. Следующий вариант относится к случаям комплексно сопряженной рефлексии, когда имеются полярные различия между ценой спроса и ценой предложения, то есть наблюдается разнонаправленность ценовых траекторий. Тогда спрос и предложение не поддаются урегулированию.

Еще одним важным заимствованием из физического мира для прогнозирования траекторий цен могут служить законы сейсмической рефлексии – правила распространения волн при землетрясениях. Так, на биржах происходят постоянные разнонаправленные колебания множества различных цен. В хаосе изменений не наблюдается заметного взаимодействия ценовых колебаний. Однако возможны мощные всплески, когда, например, происходит распродажа нестандартного крупного пакета ценных бумаг или цена ценных бумаг ведущего эмитента быстро видоизменяется. Такие процессы обладают волновым эффектом, который способствует распространению их на весь рынок, то есть сильные ценовые потрясения тянут за собой цены других активов и эмитентов. Однако всегда возможны островки инерции; для сейсмических волн такие островки формируются вокруг более твердых пород, а на финансовых рынках – активных и с большим оборотом ценных бумаг и значимых эмитентов.

## **5. Вместо заключения – задачи и перспективы**

Краткосрочные задачи выделения прогнозных функций динамических систем представляют собой не что иное, как выбор потенциала для определения траекторий цен, способов их записи и проецирования (в основном в виде вышеприведенной классификации систем). У этих действий есть две цели: первая – поиск мотиваторов систем и проецирование их аттракторов, свидетельствующих о прогрессировании цен, что позволяет провести анализ прогнозной ориентации систем; вторая – различные подходы являются своего рода воротами для второго рода мотивирования, определяемого прогнозной направленностью динамических систем, которые в идеальной форме и с разным уровнем приближения и точности описывают движение цен. В процессе реализации второй цели совершается переход к решению среднесрочных задач.

Среднесрочные задачи – это траектории цен, которые ожидают получить в ходе рассмотрения прогнозных функций динамических систем в течение одной сессии, с объяснением возможных отличий результатов, полученных при привлечении к расчетам различных моделей. Термин «сессия» зависит как от выбранной системы и различается по ее типу – линейная, нелинейная, детерминированная, хаотическая, так и фазы финансового цикла, в рамках которых предполагается проводить прогнозирование. Среднесрочные задачи относятся к неотъемлемой части самого анализа динамических систем, различие имеется лишь в уровнях анализа и позициях исследователя. Важное отличие от краткосрочных задач заключается в том, что происходит конкретизация целевой направленности системы – поиск различных способов определения траекторий будущих цен.

Как и в случае с краткосрочными задачами, среднесрочные являются частью более глобального процесса – решения долгосрочных задач. Они вытекают из освоения способов описания финансовых рынков с помощью динамических систем. Для прогнозирования важны не столько промежуточные результаты – возможности динамических систем определять будущие цены и поиск их гипотетических траекторий, сколько практическая направленность данной функции в смысле применения систем участниками рынка, то есть важности использования динамических систем для делового рыночного процесса.

Долгосрочные задачи скорее относятся к событийным для финансовой науки. Их решение позволяет определять не столько логику моделирования финансовых рынков в целом и цен в частности, сколько реализовать практи-

ческую направленность теории и «материализовать» прогнозную установку предлагаемых аналитических систем. Вышеуказанная процедура также относится к оптимизации решения поставленных задач.

Существует несколько важных моментов, которые нужно сбалансировать, решая прогнозные задачи и определяя прогресс рынка и траекторию цен. Важная их часть уникальна для каждого типа динамических систем, другие в каждом типе имеют общие черты и на каждом уровне выполнения задач, которые решаются схожими методами.

Однако нельзя весь поиск прогнозной направленности динамических систем рынка выстраивать вокруг решения вышеуказанных задач (краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных). Дело в том, что эти задачи достаточно наглядны и демонстративны. Они иллюстрируют направленность исследования, а их решение позволяет получить осязаемый результат. Тем не менее награда не столь значительна – уточнение перспектив динамических систем в аналитической работе на финансовых рынках. Более важным является определение прогнозной составляющей рассмотренных систем и оценка перспектив ее использования для определения будущих цен в рамках как всего финансового цикла, так и одной его фазы.

Ловушка, в которую попадают исследователи при анализе данных ДДС и хаотических систем и их прогнозных возможностей ценоопределения, заключается в попытках придать повышенную важность числовому значению прогноза цен для выбранных временных отрезков. Однако цифровые параметры имеют свойство колебаться и их точность редко совпадает с прогнозной, что особенно наглядно при существенном раздвижении временной перспективы. Кроме того, со временем возрастает рыночный фон и усиливаются шумовые воздействия, что делает более проблематичным выделение слабых сигналов, способных изменить рынок с учетом роста временной удаленности прогнозируемых цен. Единственным способом повышения правдоподобия прогнозов и повышения практической их направленности является, на наш взгляд, оценка вероятностей тех или иных ценовых сценариев для хаотических систем.

Другой ловушкой исследователей является то, что из-за связи различных задач, в тот момент, когда первый уровень перестает генерировать прогресс, пропадает мотивация для решения последующих задач. По факту только последовательное продвижение по всем уровням задач обеспечивает результативность аналитической работы. Одно правило применимо ко всем уровням решения задач – необходимость понимать, как работает, ка-

ковы пределы и возможности той или иной динамической системы описания движения цен.

В статье финансовый рынок представлен как динамическая система, чувствительная к начальным условиям, постоянно эволюционирующая от порядка к хаосу и обратно, управляемая аттрактором. Такой подход позволил выявить прогнозные функции динамических систем, использование которых позволяет проводить текущие и перспективные оценки состояний цен и рынков.

В статье также рассмотрена возможность использования аттракторов в качестве механизма согласования спроса и предложения. Определение траектории нелинейных динамических систем (таких как финансовые рынки) становится возможным благодаря методу оценки поведения системы в одних случаях с помощью аттрактора, а в других – бильярдного шара. Ссылки на литературу различных научных областей были использованы для описания поведения прогнозных функций динамических систем, аттракторов и построения концептуальной модели поведения цен с помощью теории бильярдного шара. Проведенное литературное исследование ограничивается охватом и глубиной и поэтому нуждается в дополнении в дальнейшей работе, что позволит создать всеобъемлющую концептуальную модель и связанные с ней проверяемые предложения.

#### Список источников

1. **Ключников И.К., Молчанова О.А., Ключников О.И.** Вероятность финансовой стабильности и безопасности: концепции и модели // Финансы и Бизнес. 2017. – № 1. С. 70–81.
2. **Medio A.** Chaotic dynamics. Theory and applications to economics, Cambridge University Press 1992. 344 p.
3. **Ключников И.К., Молчанова О.А.** Финансы. Сценарии развития: Учебник. – М: Юрайт, 2017. – 206 с.
4. Cycles and Chaos in Economic Equilibrium. Edited by Jess Benhabib. Princeton University Press, 1992. 483 p.
5. **Сигова М.В., Ключников И.К.** Теория финансовых инноваций. Критический обзор основных подходов // Вестник финансового университета – 2016. – №6 (96). – С. 85–96.
6. **Klioutchnikov I., Sigova M., Beizerov N.** Chaos theory in finance // Procedia Computer Science – 2017. – Vol. 119. – P. 368–375.
7. **Ключников И.К.** Сценарии развития денежно-финансового хозяйства // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 5. Экономика. – 2013. – № 4. – С. 110–129.

8. **Wang C., Hill D.J.** Deterministic learning of nonlinear dynamical systems *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 19, No. 04, 2009. P. 1307-1328.
9. **Ключников И.К., Ключников О.И.** Макроэкономика. Кредитные и биржевые циклы. – Москва: Юрайт, 2017. – 286 с.
10. **Ключников И.К., Молчанова О.А., Ключников О.И.** Вероятность финансовой стабильности и безопасности: концепции и модели // *Финансы и Бизнес*. – 2017. – № 1. – С. 70–81.
11. **Mandelbrot B. B., Hudson R.L.** *The (mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*. New York: Basic Books, 2004. 328 p.
12. **Sigova M., Vasiliev S., Klyuchnikov I., Zatevakhina A.** *Financial Perspectives of Big Data // 30<sup>th</sup> IBIMA Conference: 8-9 November 2017, Madrid*.
13. **Тихонов С.** Математическая теория бильярда Г. Кориолиса в популярном изложении, Декабрь 2014. URL: [http://ru-billiards.ucoz.ru/Books/Coriolis\\_Popular.pdf](http://ru-billiards.ucoz.ru/Books/Coriolis_Popular.pdf)
14. **Очнев В.В.** Решение задач на переливания методом бильярдного шара // *Старт в науке*. – 2016. – № 6. – С. 53–55.
15. **Протасов В.Ю.** Максимумы и минимумы в геометрии / Из-во Московского центра непрерывного математического образования. Выпуск 31. – Москва, 2005. – С. 5–7 (55).
16. **Nahin P.J.** *When Least is Best: How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small (or as Large) as Possible*. Princeton University Press, 2007. 392 p.
17. **Кориолис Г.** Математическая теория явлений бильярдной игры. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 235 с.

### References

1. **Klyuchnikov I.K., Molchanova O.A., Klyuchnikov O.I.** Veroyatnost' finansovoy stabil'nosti i bezopasnosti: kontseptsii i modeli // *Finansy i Biznes*. – 2017. – № 1. – S. 70–81.
2. **Medio A.** *Chaotic dynamics. Theory and applications to economics*, Cambridge University Press 1992. 344 p.
3. **Klyuchnikov I.K., Molchanova O.A.** *Finansy. Stsenarii razvitiya: Uchebnik*. –x M: Yurayt, 2017. – 206 s.
4. *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*. Edited by Jess Benhabib. Princeton University Press, 1992. 483 p.
5. **Sigova M.V., Klyuchnikov I.K.** *Teoriya finansovykh innovatsiy. Kriticheskiy obzor osnovnykh podkhodov // Vestnik finansovogo universiteta*. – 2016. – №6 (96). – S. 85x–96.

6. **Klioutchnikov I., Sigova M., Beizerov N.** Chaos theory in finance // *Procedia Computer Science*, Vol. 119, 2017. P. 368–375.
7. **Klyuchnikov I.K.** Stsenarii razvitiya denezhno-finansovogo khozyaystva // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 5. Ekonomika.* – 2013. – № 4. – S. 110–129.
8. **Wang C., Hill D.J.** Deterministic learning of nonlinear dynamical systems *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 19, No. 04, 2009. P. 1307–1328.
9. **Klyuchnikov I.K., Klyuchnikov O.I.** Makroekonomika. Kreditnyye i birzhevyye tsikly. – Moskva: Yurayt, 2017. – 286 s.
10. **Klyuchnikov I.K., Molchanova O.A., Klyuchnikov O.I.** Veroyatnost' finansovoy stabil'nosti i bezopasnosti: kontseptsii i modeli // *Finansy i Biznes*. 2017. – № 1. S. 70–81.
11. **Mandelbrot B. B., Hudson R.L.** The (mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulance. New York: Basic Books, 2004. 328 p.
12. **Sigova M., Vasiliev S., Klyuchnikov I., Zatevakhina A.** Financial Perspectives of Big Data // 30th IBIMA Conference: 8-9 November 2017, Madrid.
13. **Tikhonov S.** Matematicheskaya teoriya bil'yarda G. Koriolisa v populyarnom izlozhenii, Dekabr' 2014. URL: [http://ru-billiards.ucoz.ru/Books/Coriolis\\_Popular.pdf](http://ru-billiards.ucoz.ru/Books/Coriolis_Popular.pdf)
14. **Ochnev V.V.** Resheniye zadach na perelivaniya metodom billiardnogo shara // *Start v nauke.* – 2016. – № 6. – S. 53–55.
15. **Protasov V.YU.** Maksimumy i minimumy v geometrii. Iz-vo Moskovskogo tsentra nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya. Vypusk 31. – Moskva, 2005. – S. 5–7 (55).
16. **Nahin P.J.** When Least is Best: How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small (or as Large) as Possible. Princeton University Press, 2007. 392 p.
17. **Koriolis G.** Matematicheskaya teoriya yavleniy bil'yardnoy igry. – M.: Gosudarstvennoye izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1956. – 235 s.